This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

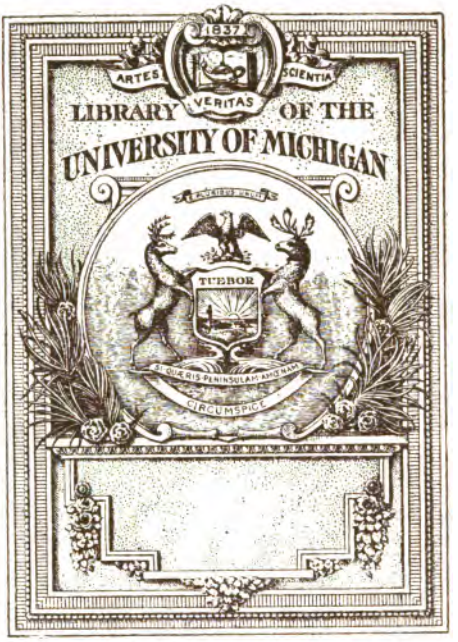
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

B 447310



THE GIFT OF
PROF. ALEXANDER ZIWET

QA
807
.C331

161

TRAITÉ DE MÉCANIQUE

Alexander Ziwet

TRAITÉ

DE MÉCANIQUE

A L'USAGE DES ÉLÈVES DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES
DES ASPIRANTS AU BACCALAURÉAT DE L'ENSEIGNEMENT CLASSIQUE (*2e série*)
ET AU BACCALAURÉAT DE L'ENSEIGNEMENT MODERNE (*3e série*)
ET DES CANDIDATS A L'INSTITUT AGRONOMIQUE

PAR

Moïse E. CARVALLO 1856—

PROFESSEUR AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ
DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES
EXAMINATEUR D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

PARIS
LIBRAIRIE NONY & Cie
17, RUE DES ÉCOLES, 17

1893
(Tous droits réservés)

Alex. Zinet
gt.
8-30-1922

PRÉFACE

Comme l'annonce le titre, ce livre est écrit spécialement pour la classe de mathématiques élémentaires. Aussi diffère-t-il des *Leçons de Statique* que j'ai publiées en 1884 et qui ne répondaient à aucun programme, mon but se bornant alors à faire connaître des méthodes que j'avais introduites dans mon cours et qui pouvaient rendre des services dans l'enseignement. Le succès a dépassé mes espérances. J'en remercie ceux qui ont accueilli mon travail. Je suis particulièrement reconnaissant à M. Sarrau qui, depuis cette publication, m'a prodigué les marques de sa bienveillante sympathie.

Ces encouragements m'ont décidé à publier un nouvel ouvrage, fruit de nouvelles recherches. Il réalise, je crois, un réel progrès sur le précédent. Mes *Leçons de Statique* présentent en effet quelques inconvénients pour l'enseignement des mathématiques élémentaires. Elles introduisent la notion de *moment linéaire* ou *vectoriel* qui n'est pas du programme du baccalauréat ; puis la théorie des forces parallèles est déduite de celle des moments, ce qui déroute les élèves, quand il s'agit de répondre à des examens dirigés dans un autre esprit. Enfin leur défaut capital est de ne contenir ni les centres de gravité, ni les machines simples.

406258

Il était facile de combler ces lacunes voulues. J'ai rédigé de mon mieux les centres de gravité, avec le développement étendu que comporte cette source inépuisable d'exercices. On remarquera deux propositions (nos 52 et 53) relatives aux figures qui possèdent un diamètre ou un plan diamétral. Elles apportent une précision et une rigueur qui manquent généralement dans l'exposition de ces questions. Pourquoi le centre de gravité du périmètre d'un triangle n'est-il pas sur la médiane, aussi bien que le centre de gravité de sa surface ? C'est ce qui échappe à l'élève, avec la démonstration insuffisante que la tradition a consacrée. Il le verra maintenant avec évidence.

Pour les machines, j'ai cherché la clarté du principe, plutôt que l'exactitude minutieuse des détails secondaires et variables. C'est ainsi que j'ai le plus souvent remplacé le dessin fidèle par un schéma, toujours plus facile à comprendre. Est-il nécessaire, au surplus, de mettre sous les yeux du lecteur des objets aussi familiers que la balance ou la brouette ?

Plus difficile était de remédier aux inconvénients inhérents à la méthode de mes *Leçons de Statique*, et d'en conserver en même temps les avantages. Je n'hésite pas à déclarer que je pense avoir atteint ce résultat. D'une part, la théorie des forces parallèles est faite directement et d'un seul coup par une méthode élémentaire et féconde. D'autre part, tout en conservant et augmentant même les avantages de simplicité que j'avais atteints en 1884 pour les conditions d'équilibre et pour la théorie des couples, j'ai pu supprimer de mon livre la théorie des moments, un peu longue dans mes *Leçons de Statique*. Je n'introduis que la notion de moment par rapport à un axe. Ces perfectionnements seront appréciés par mes collègues de l'enseignement secon-

daire. Loin de moi l'illusion que je n'encourrai pas leurs critiques. Je leur serai au contraire reconnaissant de me les adresser. Elles me seront un guide précieux pour le perfectionnement des éditions futures. Mais je sais que ces maîtres éminents sont aussi habiles à découvrir les qualités qu'à formuler leurs critiques. C'est la cause de ma confiance dans le succès d'un livre auquel j'ai donné tous mes soins.

Au point de vue pratique, il se compose de deux parties : La partie principale, écrite en gros caractères, traite les questions explicitement énoncées dans le programme du baccalauréat. La deuxième partie est formée de compléments intercalés dans le texte. Ils sont écrits en petits caractères et marqués d'un astérisque. A la seule inspection de la table et des entêtes des numéros, le lecteur reconnaîtra qu'il peut supprimer les compléments. Le livre, ainsi réduit, constitue un traité un peu aride, mais très court, limité seulement à 80 pages. Il se passe entièrement du reste et forme un tout par lui-même : c'est une sorte de manuel précieux pour l'examen.

Chaque chapitre est suivi d'énoncés d'exercices. Les uns se rattachent à la théorie ; ils la complètent et permettent souvent au lecteur de concevoir d'autres manières de l'exposer. D'autres ont le caractère de simples applications des résultats de la théorie. Parmi ces applications, les unes sont immédiates, les autres demandent quelqu'effort de recherche.

E. CARVALLO.

Janvier 1893.

PROGRAMME DE MÉCANIQUE

DE LA

CLASSE DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

(*Arrêté ministériel du* 24 *janvier* 1891.)

ÉLÉMENTS DE STATIQUE.

Notions sur les forces. — Forces égales. — Évaluation numérique d'une force. — On admet que deux forces égales et contraires, appliquées à deux points liés par une droite de longueur invariable et agissant dans la direction de cette droite, se font équilibre. — Translation du point d'application d'une force en un point quelconque pris sur sa ligne d'action et supposé lié invariablement au premier.

Composition de deux forces appliquées à un même point. — Théorème des moments par rapport à un point pris dans le plan des forces.

Composition d'un nombre quelconque de forces appliquées à un même point. — Condition d'équilibre.

Composition de deux forces parallèles.

Couple. — Un couple n'a pas de résultante. — Composition et décomposition des couples.

Composition d'un nombre quelconque de forces parallèles. — Centre des forces parallèles. — Centre de gravité; sa recherche dans quelques cas simples : triangle, trapèze, quadrilatère, prisme et pyramide.

Composition d'un système quelconque de forces appliquées à un corps solide. — Leur réduction à une force et à un couple. — Condition générale de l'équilibre. — Conditions d'équilibre lorsque le corps sur lequel agissent les forces n'est pas entièrement libre. Cas particuliers où le corps est mobile autour d'un point fixe ou autour d'un axe fixe, ou repose sur un plan inébranlable.

Des machines simples.

Levier. — Condition générale d'équilibre du levier.

Balances. — Balance ordinaire, balance romaine, balance de Roberval, balance de Quintenz.

Poulie. — Équilibre de la poulie fixe. — Equilibre de la poulie mobile. Moufles.

Treuil. — Condition d'équilibre du treuil. — Treuil des carriers.

Plan incliné. — Équilibre d'un corps placé sur un plan incliné.

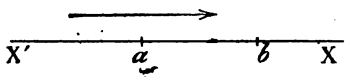
NOTIONS

DE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

---

1. **Emploi des signes + et — en géométrie.** — Sur une droite X'X, on distingue deux sens, le sens X'X que nous marquons par une flèche, et le sens XX'; prenons sur cette droite deux points a et b : on appelle *valeur algébrique du segment ab* la longueur de ce segment précédée du signe + ou du signe — suivant que, allant de a vers b, on marche dans le sens de la flèche ou en sens inverse, et on représente cette valeur par $\overline{ab}$, ab désignant seulement la valeur absolue de ce segment. Ainsi, dans la figure actuelle, on a



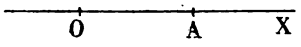
$$\overline{ab} = +ab, \qquad \overline{ba} = -ab,$$

et on a, dans tous les cas de figure,

$$\overline{ab} = -\overline{ba}.$$

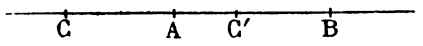
On dit que X'X est donnée en *direction* et *sens*, lorsqu'on a ainsi fixé le sens des segments positifs.

Remarque. — Étant donnée une droite X en direction et sens, sur cette droite un segment OA, et un nombre k positif ou négatif, on peut porter sur cette droite un segment OA' ayant pour valeur $\overline{OA'} = \overline{OA} \times k$. D'après nos conventions $\overline{OA}$, $\overline{OA'}$ et k sont susceptibles d'un signe. Si k est positif, OA' est



de même sens que OA ; si k est négatif, OA′ est de sens contraire à OA.

2. **Rapports des segments déterminés par un point sur un segment de droite ou sur son prolongement.** — Soit un segment AB, et le point C sur son prolongement : les deux segments $\overline{CA}$, $\overline{CB}$ sont de même signe ; donc le rapport $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$ est positif. Si, au contraire, le point est à l'intérieur du segment AB, en C′, $\overline{C'A}$ et $\overline{C'B}$ sont de signe contraire, et le rapport $\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}$ est négatif.

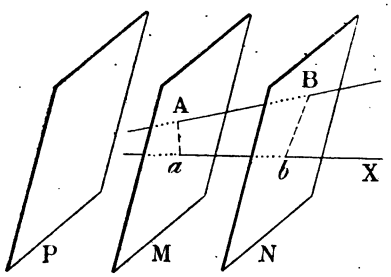


D'après cela, et en appliquant une discussion connue du troisième livre de géométrie, on voit que si le point C parcourt la droite indéfinie AB, en passant par les points A et B, le rapport $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$ décroît constamment :

$$\text{de } +1 \text{ à } 0, \qquad \text{de } 0 \text{ à } -\infty, \qquad \text{de } +\infty \text{ à } +1,$$

et on pourra toujours trouver sur la droite un point et un seul partageant le segment AB dans un rapport donné positif ou négatif. Ce point est à distance finie si le rapport est différent de 1 ; si le rapport tend vers 1, ce point s'éloigne indéfiniment.

3. **Projection d'un segment sur un axe.** — Étant donné un segment AB, une droite X, et un plan P, si par les points A et B on mène des plans M et N parallèles au plan P, et coupant en a et b la droite X, ab est dit la *projection* de AB sur X parallèlement au plan P.

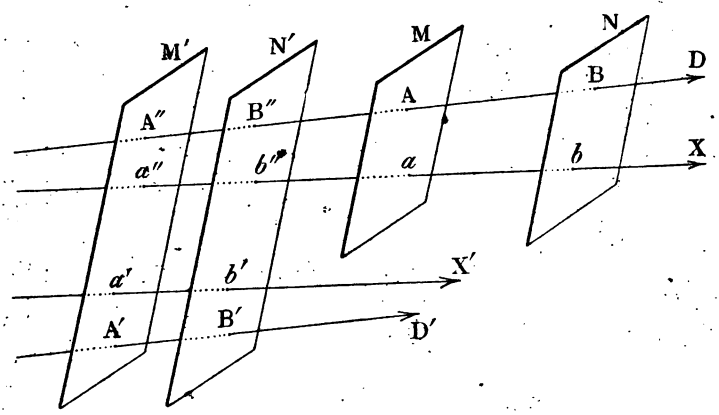


Remarques. — 1° Si le plan P est perpendiculaire sur X, ab est la *projection orthogonale* de AB ; les droites Aa, Bb sont alors perpendiculaires sur X.

2° Si les droites AB et X sont dans un même plan, Aa et Bb sont les traces sur ce plan des plans M et N ; elles sont parallèles à la trace du plan P, et la projection ab s'obtient à l'aide de droites parallèles.

4. **Théorème fondamental.** — *Des segments comptés sur des droites parallèles et de même sens sont proportionnels à leurs projections sur des axes parallèles et de même sens.*

Soient AB, A'B' des segments pris sur des droites parallèles et de même sens D, D' ; ab, $a'b'$ leurs projections sur des axes parallèles et de même sens X, X', obtenues à l'aide des plans paral-



lèles M, N, M', N'. Les plans M', N' déterminent des segments A''B'' et $a''b''$ respectivement sur les droites D et X. Les plans parallèles M, N, M', N' déterminent sur les droites D et X des segments proportionnels, et on a

$$\frac{A''B''}{AB} = \frac{a''b''}{ab}.$$

Or, on a

$$A''B'' = A'B', \qquad a''b'' = a'b',$$

comme parallèles comprises entre plans parallèles ; on a donc

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{a'b'}{ab}.$$

Jusqu'ici nous avons envisagé seulement les valeurs absolues des segments ; occupons-nous des signes. Deux cas seulement peuvent se présenter : si deux mobiles, allant de A vers B et de A' vers B' marchent dans un même sens, deux mobiles allant de

a vers b et de a' vers b' marcheront aussi dans un même sens. Dans ce premier cas, les rapports $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ et $\frac{\overline{a'b'}}{\overline{ab}}$ ont tous deux le signe $+$, car les deux termes de chacun d'eux ont alors le même signe. Le second cas est celui où les deux mobiles, allant de A vers B et de A′ vers B′, marchent en sens contraire. On voit de même que les rapports $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$ et $\frac{\overline{ab}}{\overline{a'b'}}$ sont alors tous deux négatifs. En résumé, dans tous les cas de figure, on a, en grandeur et en signe,

$$(1) \qquad \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{a'b'}}{\overline{ab}}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

5. **Corollaires.** — 1° Si $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, on aura $\overline{ab} = \overline{a'b'}$.

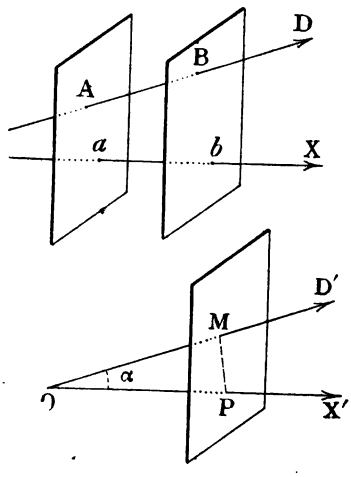
Deux segments égaux, parallèles et de même sens ont des projections égales sur des axes parallèles et de même sens.

2° De l'égalité (1) on déduit

$$\frac{\overline{ab}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{a'b'}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{a''b''}}{\overline{A''B''}} = \ldots \text{ const.}$$

Cette constante s'appelle le *coefficient de projection.*

On peut en donner une valeur commode. Soit un segment AB pris sur D et sa projection ab sur X ; je mène par un point O quelconque de l'espace OX′ et OD′ respectivement parallèles à X et D et de même sens ; D′OX′ est l'*angle* α *des deux droites.* Sur OD′ je prends un segment *positif* OM, *égal à l'unité ;* puis je projette le point M en P sur OX′ ; OP est la projection de OM.



On aura, d'après ce qui précède,

$$\frac{\overline{ab}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OM}}.$$

Or $\overline{OM}$ a pour mesure $+1$. La fraction du second membre a dès lors pour va-

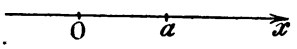
leur le nombre λ, positif ou négatif, qui mesure $\overline{OP}$. On a donc

$$\frac{\overline{ab}}{\overline{AB}} = \lambda, \qquad \text{d'où} \qquad \overline{ab} = \overline{AB}.\lambda.$$

λ est, on le voit, *la projection sur* X *du segment égal à* $+1$, *pris sur* D. Si la projection est orthogonale, MP est perpendiculaire sur OX'. Le nombre λ s'appelle alors le *cosinus* de l'angle α des deux droites et s'écrit $\cos\alpha$. On a donc, dans ce cas,

$$\overline{ab} = \overline{AB}.\cos\alpha.$$

6. **Détermination d'un point sur une droite.** — Si on a choisi un point O arbitraire sur une droite Ox donnée en direction et sens, la position d'un nouveau point a sera déterminée par la quantité



$$x = \overline{Oa},$$

qu'on appelle *abscisse* du point a.

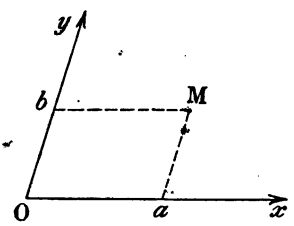
Pour avoir le point a qui a pour abscisse x, on porte une longueur égale à la valeur absolue de x sur Ox ou sur son prolongement, suivant que x est positif ou négatif; ce qu'on exprime en disant qu'on porte $\overline{Oa} = x$.

Exercice. — Trouver sur la droite Ox les points a_1 et a_2 ayant pour abscisses respectivement

$$x_1 = +8, \qquad x_2 = -10,$$

exprimées en millimètres.

7. **Détermination d'un point dans un plan.** — Soient, en direction et sens, deux droites Ox, Oy, se coupant au point O, et un point M de leur plan.



Par le point M, je mène Ma parallèle à Oy coupant Ox en a, Mb parallèle à Ox coupant Oy en b. La position du point M est déterminée par les quantités

$$x = \overline{Oa}, \qquad y = \overline{Ob},$$

qu'on appelle les *coordonnées* du point M; x est l'*abscisse*, y l'*ordonnée*; Ox et Oy sont *les axes de coordonnées*.

Remarques. — 1° Les deux axes et les deux parallèles forment un parallélogramme, qui devient un rectangle lorsque ces axes sont rectangulaires.

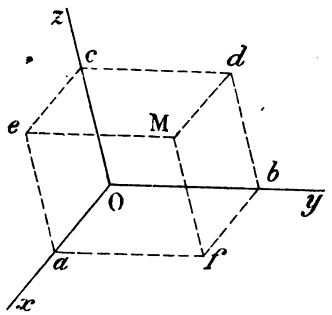
2° Connaissant x et y, on porte $\overline{Oa} = x$, $\overline{Ob} = y$; par les points a et b on mène des parallèles aux axes ; leur point d'intersection M est le point cherché.

3° On peut remplacer $\overline{Ob}$, par exemple, par son égal $\overline{aM}$, en comptant ce segment positivement dans le sens Oy, et obtenir le point M en portant $\overline{Oa} = x$, puis, sur une droite parallèle à Oy et de même sens menée par le point a, $\overline{aM} = y$.

Exercice. — Trouver les points dont les coordonnées exprimées en millimètres sont données par le tableau suivant :

	M_1	M_2	M_3	M_4
x	$+8$	$+7$	-6	-10
y	$+7$	-12	-12	$+9$

8. **Détermination d'un point dans l'espace.** — Soit, en direction et sens, trois axes quelconques formant un trièdre Ox, Oy, Oz ; par le point M menons un second trièdre, M*def*, dont les faces parallèles à celles du premier coupent respectivement en a, b, c les trois axes Ox, Oy, Oz.



La position du point M est déterminée par les quantités

$$x = \overline{Oa}, \quad y = \overline{Ob}, \quad z = \overline{Oc},$$

appelées *coordonnées* du point M ; Ox, Oy, Oz sont les *axes coordonnés*. Les trois faces du trièdre sont les *plans coordonnés*.

Remarques. — 1° Les deux trièdres O et M déterminent un parallélépipède (O*abc*, M*def*), qui devient rectangle lorsque les trois axes sont rectangulaires.

2° Pour obtenir la position du point M ayant pour coordonnées

x, y, z, on porte sur les axes $\overline{Oa} = x$, $\overline{Ob} = y$, $\overline{Oc} = z$; par les points a, b, c on mène trois plans respectivement parallèles aux plans coordonnés, et le sommet M du trièdre ainsi formé est le point cherché.

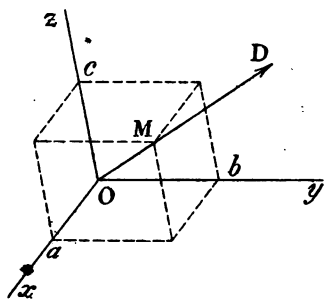
3° On peut remplacer $\overline{Oc}$, par exemple, par $\overline{fM}$, ce segment étant compté positivement dans le sens Oz. Pour obtenir le point M, on peut donc porter

$$\overline{Oa} = x, \qquad \overline{af} = y, \qquad \overline{fM} = z.$$

Exercice. — Trouver les points dont les coordonnées sont données dans le tableau suivant, en millimètres :

	x	y	z
M_1	+8	+8	−7
M_2	−10	−10	−12

9. **Détermination d'une direction dans l'espace.** — Soit, en direction et sens, une droite OD passant par l'origine ; sur cette droite, prenons un segment $\overline{OM} = +1$; $\overline{OD}$ est déterminée en direction et sens par les trois coordonnées a, b, c du point M, qu'on appelle *coefficients angulaires* de la direction OD. Si on se donnait d'une façon quelconque a, b, c, $\overline{OM}$ ne serait pas en général égal à $+1$; ces valeurs n'étant pas entièrement arbitraires, il doit exister entre elles une relation.

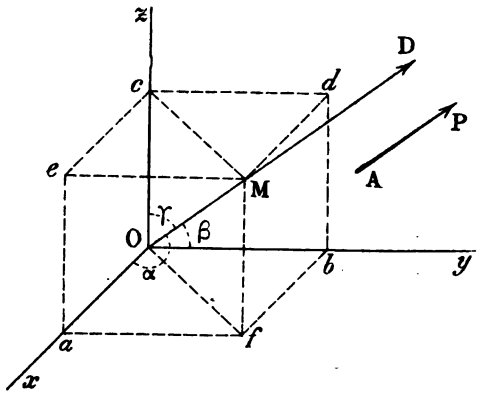


10. **Cas des axes rectangulaires.** — Dans ce cas, a, b, c sont les cosinus des angles α, β, γ que fait OD avec les trois axes. Pour trouver la relation qui existe entre eux, représentons le parallélépipède des coordonnées du point M, ($Oabc$, $Mdef$).

Traçons les droites Of, cM ; on a dans les rectangles $OfMc$ et $Oafb$, respectivement,

$$\overline{OM}^2 = \overline{Of}^2 + \overline{Oc}^2,$$

$$\overline{Of}^2 = \overline{Oa}^2 + \overline{Ob}^2;$$



d'où l'on déduit, en ajoutant membre à membre,

$$\overline{OM}^2 = \overline{Oa}^2 + \overline{Ob}^2 + \overline{Oc}^2;$$

en remplaçant les segments par leurs valeurs,

$\overline{OM} = 1$, $\overline{Oa} = \cos\alpha$, $\overline{Ob} = \cos\beta$, $\overline{Oc} = \cos\gamma$,

il vient

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Telle est la relation cherchée.

Si maintenant on considère un segment AP, de longueur R, faisant avec les trois axes des angles α, β, γ, ses projections sur les trois axes auront pour valeurs

$$(1) \quad X = R\cos\alpha, \qquad Y = R\cos\beta, \qquad Z = R\cos\gamma,$$

d'où l'on déduit

$$(2) \quad \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{X}{R}, \qquad \cos\beta = \dfrac{Y}{R}, \qquad \cos\gamma = \dfrac{Z}{R}, \\ R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2. \end{cases}$$

Les formules (2) permettent de calculer R, α, β, γ quand on connaît X, Y, Z.

Remarque. — D'après les formules (2), si deux segments ont des projections égales sur trois axes rectangulaires, ils sont égaux, parallèles et de même sens. Il est facile de s'en rendre compte aussi géométriquement et de voir que la propriété subsiste, même quand les axes ne sont plus rectangulaires.

STATIQUE

NOTIONS PRÉLIMINAIRES

11. Définitions relatives aux corps solides. — 1° On appelle *corps solide* un corps assez rigide pour qu'on puisse négliger les déformations dues aux efforts qu'il supporte.

2° On appelle *point matériel* une partie de corps solide assez petite pour qu'on puisse en négliger les dimensions.

12. Définitions relatives aux forces. — La notion de *force* est donnée par l'action d'un ressort, d'un poids, d'un aimant sur le fer, etc.

On y distingue trois éléments :

1° Le *point d'application*, par exemple le point où un ressort agit sur un corps ;

2° La *direction* et le *sens* dans lequel elle tend à faire mouvoir le point d'application ;

3° L'*intensité*, que nous allons apprendre à mesurer.

13. Mesure des forces. — 1° Deux forces sont *égales* lorsqu'appliquées séparément à un même point matériel, dans la même direction et le même sens, elles font équilibre [1] chacune à une même troisième.

2° Une force est la *somme* de plusieurs autres, lorsqu'elle agit comme toutes ces autres appliquées à la fois au même point, dans la même direction et le même sens, c'est-à-dire

(1) La définition précise du mot équilibre est donnée au n° 16.

quand la première et l'ensemble des autres peuvent être équilibrées séparément par une même force.

3° Une force A est dite *multiple* d'une autre B si A est la somme de plusieurs forces égales à B ; B est *sous-multiple* de A.

4° Le *rapport* d'une force A à une autre B est le nombre qui exprime combien A contient de parties aliquotes de B dans le cas où ces forces contiennent chacune un nombre exact de fois une troisième force appelée *commune mesure*.

La notion du rapport de deux forces s'étend au cas où les forces n'ont pas de commune mesure comme pour toutes les grandeurs.

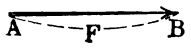
5° On appelle *mesure* d'une force le rapport de cette force à celle qui est prise pour unité.

On prend en général pour unité le *kilogramme* (1).

14. Comparaison des forces aux poids à l'aide du dynamomètre. — Le *dynamomètre* est un ressort dont on mesure la flexion produite : 1° par des poids à l'aide desquels on gradue l'instrument ; 2° par des forces quelconques, par exemple la traction d'un cheval.

On voit à quel poids correspond la force à mesurer. Le poids et la force faisant équilibre à une même tension du ressort sont des forces égales, et la valeur de la première en kilogrammes est la mesure de la seconde.

15. Représentation géométrique d'une force. — On représente une force par une flèche dont la longueur a même mesure que la force, partant du point d'application, dans la même direction et le même sens.



(1) Le système métrique adopte le *gramme*. Pour des raisons que nous ne pouvons pas exposer ici, le congrès des électriciens, en 1882, a adopté la *dyne* $= \frac{gramme}{980,88}$, soit un peu plus d'un milligramme. La *mégadyne* vaut 1.000.000 de dynes, soit un peu plus d'un kilogramme.

On nomme une force, soit :

1° Par sa grandeur, *la force* F.

2° Par ses deux extrémités, en partant du point d'application, *la force* AB.

16. **Définition.** — On dit qu'un système de forces est en *équilibre* sur un corps, si on ne trouble pas l'état de repos ou de mouvement de ce corps en faisant agir ou supprimant ces forces.

17. **Théorème.** — *Si deux systèmes de forces* A *et* B *sont équilibrés par un même troisième* C, *on peut les remplacer l'un par l'autre.*

En effet, au système A on peut ajouter les deux systèmes B et C qui se font équilibre ; dès lors dans le système (A, B, C), on peut supprimer les systèmes A et C qui se font équilibre. Donc le système A peut être remplacé par le système B.

C. Q. F. D.

Ce théorème justifie les dénominations suivantes :

18. **Définitions.** — 1° Deux systèmes de forces qui peuvent être équilibrés par un même troisième sont dits *équivalents*.

2° Si un système de forces est équivalent à une force unique, celle-ci est dite la *résultante* des premières, qui en sont les *composantes*.

On appelle *composition* l'opération qui consiste à remplacer plusieurs forces par leur *résultante*; la *décomposition* est l'opération inverse.

19. **Principe expérimental.** — *Pour que deux forces appliquées aux extrémités d'une tige rigide soient en équilibre*, il faut et il suffit *qu'elles soient égales, appliquées suivant la direction de la tige et en sens inverse.*

Conséquences. — 1° *Pour que deux forces appliquées à un corps solide soient en équilibre*, il faut et il suffit *qu'elles soient*

égales, dirigées suivant la droite qui joint leurs points d'application et en sens contraire, ou, plus brièvement, *égales et directement opposées.*

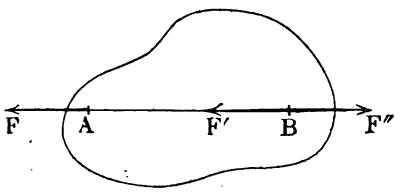
2° *Pour que deux forces appliquées à un même point matériel se fassent équilibre*, il faut et il suffit *qu'elles soient égales et directement opposées.*

3° *Si deux forces appliquées à un même point matériel ne sont pas égales et directement opposées, elles ont une résultante.*

En effet, ces forces F_1 et F_2 ne se faisant pas équilibre, tendent à donner à leur point d'application un déplacement qui pourra être empêché par une force P directement opposée à ce déplacement et d'une intensité convenable. La force P équilibre donc le système (F_1, F_2) ; or elle équilibre aussi la force R égale et directement opposée à P. Donc F_1 et F_2 ont une résultante R.

C. Q. F. D.

20. **Théorème.** — *On peut, sans changer l'effet d'une force sur un corps solide, transporter son point d'application en un point quelconque de sa direction.*



Je dis que la force AF, appliquée au point A d'un corps solide, est équivalente à la force égale BF', appliquée au point B dans la direction et le sens AF.

En effet, ces forces sont équilibrées par une même troisième F'', égale et directement opposée aux deux premières.

Remarque. — Par un raisonnement semblable, on voit que, *réciproquement, si deux forces* AF *et* BF' *sont équivalentes, elles sont égales, de même sens, et appliquées suivant la même droite.*

CHAPITRE PREMIER

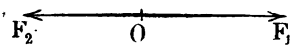
COMPOSITION DES FORCES AGISSANT SUR UN MÊME POINT ÉQUILIBRE DU POINT MATÉRIEL LIBRE

§ I. — Composition des forces appliquées a un même point et dirigées suivant une même droite.

21. Toutes les forces sont dirigées dans le même sens. — Par définition, leur somme appliquée dans la même direction et le même sens est leur résultante (13 et 18).

Remarque. — Réciproquement, on peut décomposer une force en plusieurs autres de même sens dont la somme soit égale à la force donnée.

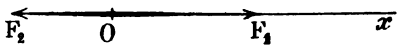
22. Deux forces de sens contraire. — Soient les deux forces F_1 et F_2, et soit $F_1 > F_2$. On peut décomposer la force F_1 en deux autres, ayant pour valeurs F_2 et $F_1 - F_2$; les deux forces contraires égales à F_2 se détruisent, et il reste la force $F_1 - F_2$ *dirigée dans le sens de la plus grande*, F_1.



23. Nombre quelconque de forces dirigées dans les deux sens. — Soient les forces F_1, F_2, ..., dirigées dans un sens ; F'_1, F'_2, ..., dirigées en sens contraire.

Ces deux systèmes de forces ont chacun une résultante égale à leur somme (21), et ces deux résultantes ont elles-mêmes une résultante égale à la différence entre ces deux sommes et dirigée dans le sens de la plus grande (22).

24. Expression analytique des résultats. — Fixons le sens Ox des segments positifs sur la direction des forces, et soient OF_1, OF_2, .., OR les forces et leur résultante, F_1, F_2, ..., R les valeurs absolues de ces forces, précédées du signe + ou du signe — suivant qu'elles sont dirigées dans le sens Ox ou en sens contraire. *La résultante sera donnée en grandeur et en sens par la formule*



$$R = F_1 + F_2 + \cdots = \Sigma F_1,$$

car

1° La valeur absolue de ΣF_1 est, d'après les règles de l'algèbre, la différence entre la somme des forces dirigées dans un sens et celle des forces dirigées en sens contraire ; donc cette valeur est la valeur absolue de R (23) ;

2° Suivant que cette somme est positive ou négative, OR est dirigée dans le sens Ox, ou en sens inverse (23) et, par suite, R est positif ou négatif.

Donc on a bien en grandeur et en signe

$$R = \Sigma F_1,$$

et cette formule fait connaître la grandeur et le sens de OR.

C. Q. F. D.

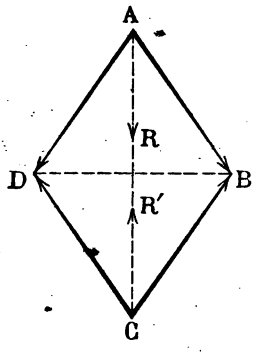
§ II. — Résultante de deux forces concourantes.

25. Lemme I. — *Des forces égales appliquées suivant les quatre côtés d'un losange solide, à partir de deux sommets opposés, se font équilibre.*

Soient AB, AD; CB, CD les forces égales appliquées suivant les quatre côtés du losange ABCD, à partir des som-

mets A et C; R et R′ les résultantes de ces deux systèmes de forces.

1° Je fais tourner la figure DAB de 180° autour de AC; AD vient occuper la place qu'occupait d'abord AB; AB vient occuper celle qu'occupait d'abord AD. Cette rotation a ainsi pour effet de reproduire exactement le même système de forces qu'on avait d'abord; donc *la résultante du nouveau système coïncide avec l'ancienne*, R. D'autre part, cette résultante a accompagné les forces AB et AD dans leur mouvement de rotation; donc *la résultante du nouveau système s'obtient en faisant tourner* R *de* 180° *autour de* AC. De ces deux conséquences soulignées, résulte celle-ci : *Quand on fait tourner* R *de* 180° *autour de* AC, *la position de* R *n'est pas changée*. Donc R est dirigée suivant l'axe de rotation AC ou son prolongement. De même R′ est dirigée suivant AC.



2° Si maintenant on retourne la figure BAD, non plus autour de AC, mais autour de BD, elle recouvre la figure inférieure BCD; donc R recouvre R′. Donc, avant le retournement, R et R′ sont égales et directement opposées, et le losange est en équilibre.

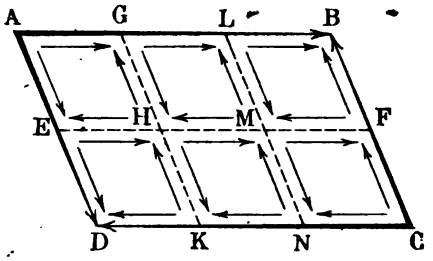
C. Q. F. D.

26. **Lemme II.** — *Des forces appliquées suivant les quatre côtés d'un parallélogramme solide, égales à ces côtés et à partir de deux sommets opposés, se font équilibre.*

Soient les forces AB, AD, CB, CD, formant le parallélogramme ABCD.

1° Supposons que AB et AD aient une commune mesure, comprise, par exemple, deux fois dans AD et trois fois

dans AB. Par les points de division déterminés par la commune mesure, je mène des parallèles aux bases : EF, GHK, LMN. Je décompose ainsi le parallélogramme en six losanges. Cela posé, je décompose les forces respective-

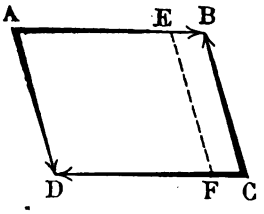


ment en deux et en trois forces égales à la commune mesure et appliquées suivant AE, ED; CF, FB; AG, GL, LB; CN, NK, KD; et j'applique, suivant chacun des côtés des losanges où il n'y a aucune force, deux forces contraires, égales à ces côtés.

Les forces AE, AG; HE, HG se font équilibre (25). De même chacun des autres losanges est en équilibre. Donc le parallélogramme entier est en équilibre.

C. Q. F. D.

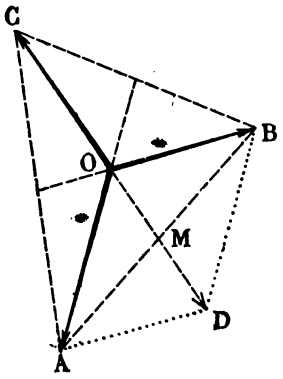
2° AD *et* AB *n'ont pas de commune mesure.* — Portons, sur AB, $\frac{1}{n}$ de AD autant de fois que possible; soit EF la parallèle menée par le point E ainsi obtenu au côté AD. Des forces représentées par AE, AD, FD, FE seraient en équilibre (cas précédent).



Si on augmente indéfiniment le nombre n, ce système a pour limite le système AB, AD, CB, CD. Comme il y a toujours équilibre, *nous admettrons* que le système limite est en équilibre.

27. **Théorème fondamental. — Parallélogramme des forces.** — *La résultante de deux forces concourantes est représentée*, en direction, sens et grandeur, *par la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux forces.*

Soient OA, OB les deux forces ; D le quatrième sommet du parallélogramme construit sur ces forces ; je dis que OD est, *en direction, sens et grandeur*, la résultante de OA, OB.

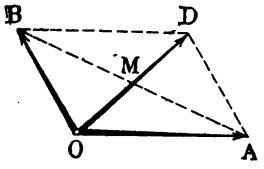


1° *En direction.* — En effet, les forces DA, DB, supposées appliquées à un corps solide, feraient équilibre à OA, OB (26). Les deux résultantes ont donc pour direction commune la droite OD qui joint leurs points d'application (19).

2° *En sens et en grandeur.* — En effet, soit OC une force égale et directement opposée à la résultante ; cette force ayant pour direction OD passe par le milieu M de la diagonale AB du parallélogramme OADB. De même OA, faisant équilibre à OB, OC, est directement opposée à leur résultante, et sa direction passe par le milieu de BC. Donc O est le point de rencontre des médianes du triangle ABC ; par suite OC est dirigée en sens inverse de OM ou de OD, égale à 2OM ou à OD. Donc OD représente en direction, sens et grandeur la résultante de OA, OB.

C. Q. F. D.

28. **Corollaires.** — 1° *Pour avoir la résultante* OD *de deux forces concourantes* OA, OB, il suffit *de joindre le point* O *au milieu* M *de* AB *et de prolonger d'une longueur* MD *égale à* OM ;



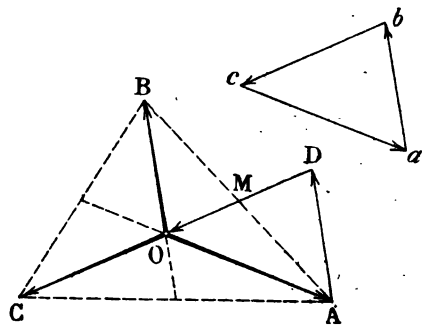
2° Il suffit, *par l'extrémité de l'une*, A, *de mener une droite égale, parallèle à l'autre et de même sens*, AD.

3° *Pour que trois forces concourantes* OA, OB, OC *se fassent équilibre*, il faut et il suffit *que le point* O *soit le point de rencontre des médianes du triangle* ABC.

Les droites OA, AD, DO sont égales, parallèles aux trois forces OA, OB, OC et de même sens. Donc :

4° *Pour que trois forces concourantes* OA, OB, OC *soient en équilibre*, il faut et il suffit *qu'elles soient égales, parallèles aux trois côtés d'un triangle et de même sens que ces côtés suivis dans un même sens de cheminement.*

*29. **Applications géométriques.** — Étant donné trois forces en équilibre, OA, OB, OC, qui sont les $^2/_3$ des médianes du triangle ABC, on en déduit le triangle *abc* en menant les côtés *ca*, *ab*, *bc*, respectivement égaux, parallèles à OA, OB, OC et de même sens; et réciproquement, du second triangle on déduit le pre-



mier. Ces deux triangles ont des relations simples, par exemple :

1° Les côtés du second sont les $^2/_3$ des médianes du premier et parallèles à ces médianes ; les côtés du premier sont les doubles des médianes du second.

2° Le triangle OAB est équivalent au triangle OAD ; par suite la surface du triangle ABC est trois fois celle de *abc*.

3° Les angles des médianes de ABC sont les suppléments des angles de *abc*, par exemple

$$\widehat{AOB} = \pi - \widehat{cab}.$$

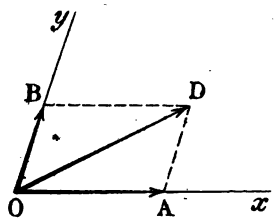
Ces remarques peuvent servir à résoudre certains problèmes où figurent des médianes, par exemple :

Construire un triangle connaissant les trois médianes. — On construit un triangle *cab* ayant pour côtés les $^2/_3$ des médianes données ; par un point O quelconque on mène des droites OA, OB, OC, égales et parallèles à ces côtés ; le triangle ABC ainsi obtenu est le triangle cherché.

Remarque. — Dans les applications de mécanique, il conviendra de prendre pour inconnues les éléments du triangle OAD et non ceux des forces OA, OB, OC, parce que la résolution géométrique et trigonométrique des triangles est bien connue.

30. **Décomposition d'une force en deux autres.** — 1° *Suivant deux directions données.*

Soit la force donnée OD et les deux directions Ox, Oy. On construira le triangle OAD en menant, par le point D, DA parallèle à Oy. Les composantes suivant Ox et Oy sont respectivement OA et OB égale, parallèle à AD et de même sens. Pour obtenir OB, il suffit de mener DB parallèle à Ox.



Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que OA et DA se coupent, c'est-à-dire que la force OD et les deux directions Ox, Oy soient dans un même plan.

2° *Décomposition d'une force* OD *en deux autres dont l'une,* OA, *est donnée.*

Le triangle OAD s'obtient en joignant les points A et D ; la force inconnue est OB, égale, parallèle à AD et de même sens.

Remarque. — OA et OB sont les projections de OD sur chacune des directions, parallèlement à l'autre.

31. **Expressions analytiques.** — On a, dans le triangle OAD,

$$\overline{QD}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AD}^2 - 2OA \times AD \cos OAD,$$

$$\frac{AD}{\sin AOD} = \frac{OA}{\sin ODA} = \frac{OD}{\sin OAD}.$$

En remarquant que l'on a

$$AD = OB, \qquad \widehat{OAD} = \pi - \widehat{AOB};$$

posant

$$OA = P, \qquad OB = Q, \qquad OD = R,$$

et désignant par (P, Q), (Q, R), (R, P) les angles que font entre elles les forces, il vient

$$(1) \qquad R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos (P, Q),$$

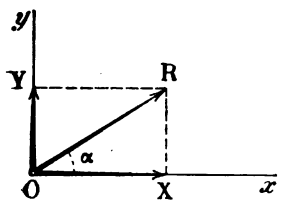
$$(2) \qquad \frac{P}{\sin (Q, R)} = \frac{Q}{\sin (R, P)} = \frac{R}{\sin (P, Q)}.$$

La double égalité (2) s'énonce ainsi :

Chaque force est proportionnelle au sinus de l'angle des deux autres.

Remarque. — Les trois équations (1) et (2) permettent de calculer trois des éléments, connaissant les trois autres, pourvu que les éléments donnés ne soient pas trois angles ; mais elles ne formeront pas en général le système le plus avantageux, car ce système n'est pas employé en trigonométrie. Dans chaque cas on devra voir quels sont les éléments connus du triangle OAD et se servir des formules toutes faites de la trigonométrie pour résoudre ce triangle.

Cas particulier. — Si les directions Ox, Oy sont rectangulaires, on a, en désignant par R, X, Y et α respectivement la force, ses deux composantes et son angle avec Ox :



$$(1) \qquad \begin{cases} X = R \cos \alpha, \\ Y = R \sin \alpha, \end{cases}$$

$$(2) \qquad X^2 + Y^2 = R^2.$$

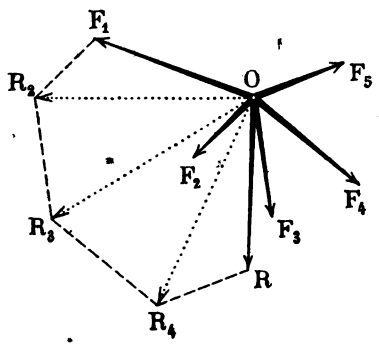
Des deux premières équations on tire encore

$$(3) \qquad \cos \alpha = \frac{X}{R}, \qquad \sin \alpha = \frac{Y}{R}, \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{Y}{X}.$$

Les formules (2) et (3) permettent de déterminer la résultante quand on connaît X et Y ; il est avantageux de calculer l'angle α par sa tangente, les valeurs de sin α et cos α ne servant qu'à montrer par leurs signes dans quel quadrant tombe l'extrémité de l'arc α.

§ III. — Composition d'un nombre quelconque de forces appliquées a un même point. — Équilibre du point matériel libre.

32. **Théorème.** — *La résultante d'un nombre quelconque de forces appliquées à un même point* O *et dirigées d'une façon quelconque dans l'espace est représentée par la droite qui ferme un polygone ayant pour premier sommet le point* O *et dont les côtés sont égaux, parallèles aux forces et dirigés dans le même sens lorsqu'on parcourt le périmètre de ce polygone à partir du point* O.



Soient les forces F_1, F_2, F_3, ... appliquées au point O. Je remplace les forces F_1, F_2 par leur résultante OR_2, obtenue en menant F_1R_2 égale, parallèle à F_2 et de même sens ; puis OR_2 et OF_3 par leur résultante OR_3, obtenue en menant R_2R_3 égale, parallèle à F_3 et de même sens. En continuant ainsi de suite, j'arriverai finalement à remplacer toutes les forces par une dernière OR, qui est la résultante du système. Cette résultante

OR ferme le polygone $OF_1R_2R_3$, ..., qui a ses côtés parallèles, égaux à F_1, F_2, F_3, ..., et dirigés dans le même sens lorsqu'on parcourt ce polygone à partir du point O.

C. Q. F. D.

Remarques. — 1° Il est inutile de tracer les droites OR_2, OR_3, ...

2° On peut faire la composition dans un autre ordre arbitraire et obtenir, à l'aide d'un autre polygone, la même résultante OR.

3° La condition d'équilibre est $OR = 0$.

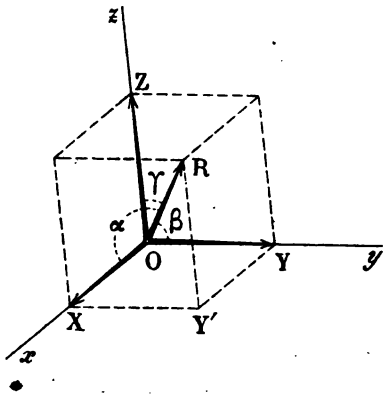
Donc, pour que le point O soit en équilibre, il faut et il suffit que le polygone $OF_1R_2R_3$, ... se ferme de lui-même, et on généralise ainsi un résultat précédent (28) :

Corollaire. — *Pour qu'un système de forces concourantes soit en équilibre*, il faut et il suffit *qu'elles soient égales, parallèles aux côtés d'un polygone fermé et de même sens que ces côtés suivis dans un même sens de cheminement sur le contour de ce polygone.*

33. Définitions. — 1° On appelle *polygone des forces* le polygone qui sert à trouver la résultante.

2° Des lignes ayant, comme les forces, grandeur, direction et sens, servent à représenter d'autres éléments que des forces : des vitesses, des couples dont nous verrons plus loin l'étude. Étant donné plusieurs lignes P_1, P_2, ..., si on forme à l'aide de ces lignes le polygone analogue au polygone des forces, la droite OR qui ferme ce polygone s'appelle *résultante* ou *somme géométrique* de ces lignes, qui sont les *composantes* ou *parties* de la somme.

34. Théorème. — *La résultante de trois forces appliquées à un même point et formant un trièdre est la diagonale du paral-*



lélépipède construit sur ces trois forces.

Construisons le parallélépipède sur les trois forces X, Y, Z. Les arêtes XY', Y'R sont respectivement égales, parallèles à OY, OZ et de même sens ; donc OR est la résultante (32).

C. Q. F. D.

35. **Décomposition d'une force en trois autres suivant trois axes formant un trièdre.** — Soit OR à décomposer suivant les trois directions Ox, Oy, Oz. Par le point R on mène des plans parallèles aux trois faces du trièdre OXYZ. Les trois arêtes OX, OY, OZ du parallélépipède ainsi formé sont, d'après ce qui précède, les trois composantes de OR.

Remarques. — Les composantes OX, OY, OZ sont les projections de OR sur les trois axes parallèlement aux trois plans coordonnés ; ces projections sont obliques ou rectangulaires suivant que les axes sont obliques ou rectangulaires.

36. **Composition de plusieurs forces appliquées à un même point, à l'aide de deux axes ou de trois axes passant par ce point.** — Soient les forces F_1, F_2, ...

1° Si ces forces sont dans un même plan, on prend dans ce plan deux axes quelconques Ox, Oy. On pourra décomposer la force F_1 en deux autres X_1 et Y_1 suivant Ox et Oy ; et de même pour les autres. Les forces dirigées suivant Ox se composent en une seule, X ; les forces dirigées suivant Oy en une autre, Y (23). La résultante R

de X et de Y sera la résultante cherchée. Pour que les forces se fassent équilibre, il faut et il suffit que X et Y soient nulles ; si une seule de ces forces est nulle, l'autre est la résultante.

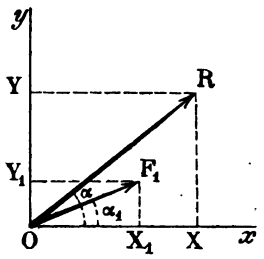
2° Dans tous les cas, on pourra décomposer chacune des forces suivant trois axes Ox, Oy, Oz; on aura ainsi trois résultantes partielles, X, Y, Z, qui donneront une résultante unique par la règle du parallélépipède (34).

Pour qu'il y ait équilibre, il faut et il suffit que les trois résultantes soient nulles ; si deux d'entre elles sont nulles, la troisième est la résultante.

Corollaire. — *La projection de la résultante sur l'axe quelconque* Ox *égale la résultante des projections des forces sur cet axe.*

Car X est la résultante de X_1, X_2, ..., et ces forces sont les projections sur Ox de R, F_1, F_2, ...

37. **Expressions analytiques.** — 1° Si on désigne par X, X_1, X_2, ... les valeurs algébriques des composantes de R, F_1, F_2, ... suivant l'axe Ox, on aura (24)



$$(1) \quad X = X_1 + X_2 + \ldots\ldots = \Sigma X_1.$$

La projection de la résultante sur un axe quelconque égale la somme algébrique des projections des composantes.

* 2° Les forces sont dans un même plan et on choisit dans ce plan deux axes rectangulaires Ox, Oy.

On aura, en conservant les notations précédentes et désignant par α, α_1, α_2, ... les angles des forces R, F_1, F_2, ... avec Ox,

$$X_1 = F_1 \cos \alpha_1, \qquad X_2 = F_2 \cos \alpha_2, \ldots\ldots$$
$$Y_1 = F_1 \sin \alpha_1, \qquad Y_2 = F_2 \sin \alpha_2, \ldots\ldots$$

(1) $$X = \Sigma X_1, \qquad Y = \Sigma Y_1 ;$$

(2) $$R^2 = X^2 + Y^2 ;$$

(3) $$\cos \alpha = \frac{X}{R} ; \qquad \sin \alpha = \frac{Y}{R} ; \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{Y}{X}.$$

Équations d'équilibre.

Il faut et il suffit, pour l'équilibre, que X et Y soient nulles, ce qui donne

(4) $$\Sigma X_1 = 0, \qquad \Sigma Y_1 = 0.$$

* 3° Les forces concourantes étant quelconques, on considère trois axes rectangulaires dans l'espace, Ox, Oy, Oz.

Conservant les notations précédentes, on désigne par α, β, γ ; α_1, β_1, γ_1 ; α_2, β_2, γ_2, ... les angles des forces R, F_1, F_2, ... avec les trois axes. Il vient ainsi :

$$X_1 = F_1 \cos \alpha_1, \qquad X_2 = F_2 \cos \alpha_2, \ldots\ldots$$
$$Y_1 = F_1 \cos \beta_1, \qquad Y_2 = F_2 \cos \beta_2, \ldots\ldots$$
$$Z_1 = F_1 \cos \gamma_1, \qquad Z_2 = F_2 \cos \gamma_2, \ldots\ldots$$

(1) $$X = \Sigma X_1, \quad Y = \Sigma Y_1, \quad Z = \Sigma Z_1 ;$$

(2) $$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 ;$$

(3) $$\cos \alpha = \frac{X}{R}, \quad \cos \beta = \frac{Y}{R}, \quad \cos \gamma = \frac{Z}{R}.$$

Équations générales d'équilibre du point matériel libre :

$$\Sigma X_1 = 0, \quad \Sigma Y_1 = 0, \quad \Sigma Z_1 = 0.$$

EXERCICES PROPOSÉS SUR LE CHAPITRE I.

Les problèmes suivants se ramènent à la résolution des triangles. Ils peuvent être résolus, soit par une construction graphique, soit par le calcul. Pour les applications numériques, l'usage de la règle à calcul doit être recommandé, parce qu'il permet de les traiter très rapidement.

1. Trois forces d'intensités données P, Q, R se font équilibre. Trouver les angles qu'elles font entre elles. Discuter.

Application : $P = 18^{kg}$, $Q = 20^{kg}$, $R = 26^{kg}$.

2. Deux forces données P et Q font entre elles un angle donné $(\widehat{P, Q}) = \alpha$. Trouver leur résultante R et les angles que fait cette force avec les deux premières.

Application : $P = 25^{kg}$, $Q = 30^{kg}$, $\alpha = 65°$.

3. Décomposer une force donnée R en deux autres P et Q faisant avec R des angles donnés α et β.

Application : $R = 35^{kg}$, $\alpha = 40°$, $\beta = 20°$.

4. Une force P est appliquée à un point matériel dans une direction connue. Suivant quelle direction faut-il appliquer une deuxième force de grandeur donnée Q pour que leur résultante R soit dirigée suivant une droite donnée faisant un angle α avec P ? Discuter.

Application : $P = 20^{kg}$, $Q = 25^{kg}$, $\alpha = 65°$.

5. Décomposer une force R en deux autres P et Q faisant entre elles un angle α et dont la somme S soit donnée. Discuter.

Application : $R = 35^{kg}$, $\alpha = 90°$, $S = 48^{kg}$.

6. Décomposer une force R en deux autres P et Q faisant entre elles un angle donné α et dont la différence D soit donnée. Discuter.

Application : $R = 36^{kg}$, $D = 15^{kg}$, $\alpha = 128°$.

7. Trois forces P, Q, R se font équilibre. On donne l'angle $(\widehat{P, Q}) = \alpha$ et le rapport $\frac{Q}{R} = \frac{m}{n}$. Trouver le rapport $\frac{P}{Q}$ et les angles $(\widehat{R, P})$ et $(\widehat{R, Q})$.

Application : $R = Q$, $(\widehat{P, Q}) = 110^0$.

Tous les problèmes de résolution des triangles peuvent être ainsi transformés en problèmes relatifs aux forces concourantes. Nous n'en donnerons pas ici d'autre exemple. Voici quelques applications de la réduction des forces au moyen de deux ou de trois axes.

8. Trois forces F_1, F_2, F_3 sont situées dans un même plan et appliquées à un même point. La première, horizontale, tire vers la droite ; la deuxième, verticale, tire vers le haut ; la troisième fait avec la première un angle de -30^0, compté comme en trigonométrie. Trouver la résultante et les angles qu'elle fait avec les deux premières forces.

Application : $P = 3^{kg}$, $Q = 2^{kg}$, $R = 1^{kg}$.

9. Quatre forces situées dans un même plan F_1, F_2, F_3, F_4 agissent sur un même point ; on donne leurs intensités. Leurs positions sont déterminées par les conditions suivantes : F_1 est horizontale et tire vers la droite ; puis on donne les angles F_1OF_2, F_1OF_3, F_2OF_4, comptés comme en trigonométrie. Déterminer la résultante de ces quatre forces.

Application : $F_1 = F_3 = 1^{kg}$, $F_2 = 2^{kg}$, $F_4 = 3^{kg}$.
$\widehat{F_1OF_2} = +30^0$, $\widehat{F_1OF_3} = +90^0$, $\widehat{F_2OF_4} = -90^0$.

10. Trois forces rectangulaires, d'intensités données, F_1, F_2, F_3, sont appliquées au même point. Déterminer la résultante et ses projections sur les trois faces du trièdre qu'elles forment. Trouver les angles de la résultante et de ses trois projections avec les trois forces données.

Application : $F_1 = F_2 = 1^{kg}$, $F_3 = 3^{kg}$.

11. Six forces F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6 sont appliquées à un même point O. Les trois premières déterminent un trièdre trirectangle $Oxyz$. Elles ont pour intensité 20^{kg}. Les trois autres sont respectivement dans les angles xOy, yOz, zOx et font avec les arêtes Ox, Oy, Oz respectivement les angles $xOF_4 = 30^0$, $yOF_5 = 45^0$, $zOF_6 = 60^0$. Elles ont pour valeurs $F_4 = 25^{kg}$, $F_5 = 30^{kg}$, $F_6 = 35^{kg}$. Calculer la résultante de ces six forces et les angles qu'elle fait avec les trois axes.

Les problèmes suivants demandent quelqu'invention. Les solutions des questions 14, 15, 16, 17 et 18 pourront être regardées plus loin comme des conséquences du théorème de Leibniz (n° 40).

12. Trouver la position d'équilibre d'un point matériel attiré par les sommets d'un triangle, les forces attractives ayant trois intensités données.

13. On donne un cercle O. Dans ce cercle, une corde fixe AB et une corde AC, mobile autour du point A. Trouver le lieu géométrique de l'extrémité de la résultante des forces représentées par AB et AC. Pour quel point C cette résultante est-elle maximum ou minimum ?

14. On joint un point M aux trois sommets d'un triangle ABC. Montrer que la résultante des forces représentées par MA, MB, MC passe par le centre de gravité G du triangle et a pour valeur 3MG.

15. Quel lieu décrit l'extrémité de cette résultante, si le point M parcourt : 1° le cercle circonscrit au triangle ; 2° le cercle des neuf points (cercle passant par les milieux des trois côtés du triangle ABC) ? Pour quelles positions du point M, dans ces deux cas, la résultante est-elle maximum ou minimum ?

16. Dans un cercle dont le diamètre AOA′ est horizontal, on fait mouvoir une couple de cordes verticales et équidistantes du centre, BC et B′C′. Trouver la résultante des quatre forces représentées par AB, AC, AB′, AC′ et montrer qu'elle est constante.

17. On considère un hexagone régulier ABCDEF et les forces représentées par AB, AC, AD, AE, AF. Trouver la résultante de ces cinq forces.

18. On considère un triangle rectangle OAB dont l'hypoténuse AB est partagée en n parties égales, $AM_1 = M_1M_2 = M_2M_3 \ldots = M_{n-1}B$. Déterminer la résultante des forces représentées par $OA, OM_1, OM_2, \ldots, OM_{n-1}, OB$.

Voici maintenant quelques questions qui se rattachent à la théorie et la complètent.

19. Il est évident *a priori* que la résultante de plusieurs forces est indépendante de l'ordre dans lequel on les compose. Démon-

trer que ce fait est conséquence de la règle du parallélogramme des forces.

20. Trois forces perpendiculaires sur les milieux des trois côtés d'un triangle solide, proportionnelles à ces côtés et dirigées toutes les trois vers l'intérieur, ou toutes les trois vers l'extérieur se font équilibre. Démontrer et généraliser ce théorème.

21. Si les projections d'une force sur trois droites parallèles aux trois arêtes d'un trièdre sont nulles, cette force est nulle. Que peut-on conclure, quand les trois droites, au lieu d'être parallèles aux arêtes d'un trièdre, sont parallèles à un même plan ?

22. Si les projections d'une force sur deux plans qui se coupent sont nulles, cette force est nulle. Que peut-on conclure, quand les deux plans, au lieu de se couper, sont parallèles ?

23. Si l'on projette sur un plan plusieurs forces concourantes, et leur résultante, la projection de celle-ci est la résultante des projections des forces données.

24. Si un système de forces concourantes est en équilibre et si, sans changer leurs directions, on les réduit toutes dans le même rapport, le nouveau système est en équilibre. L'équilibre subsiste encore si, après cette réduction, on fait tourner toutes ces forces d'un même mouvement d'ensemble autour d'un axe passant par leur point d'application.

25. Étant donné deux forces concourantes OF_1, OF_2 et une sécante A_1A_2 qui détermine sur elles des rapports donnés, positifs ou négatifs, $\frac{\overline{OF_1}}{\overline{OA_1}} = p_1$, $\frac{OF_2}{OA_2} = p_2$, leur résultante s'obtient en joignant le point O au point B qui partage A_1A_2 dans le rapport $\frac{\overline{BA_1}}{\overline{BA_2}} = -\frac{p_2}{p_1}$, et portant sur OB le segment $\overline{OR} = \overline{OB}(p_1 + p_2)$. Examiner le cas particulier où l'on a $p_1 + p_2 = 0$.

26. Généralisation. — On donne des points fixes A_1, A_2, ..., on joint un point O variable de l'espace à ces points par des droites, suivant lesquelles on applique des forces F_1, F_2, ..., respectivement égales à $\overline{OA_1}.p_1$, $\overline{OA_2}.p_2$, ...; p_1, p_2, ... étant

des constantes positives ou négatives. Montrer que la résultante passe par un point fixe C et a pour valeur $\overline{OC} \times (p_1 + p_2 + \ldots)$. Examiner le cas particulier où l'on a $p_1 + p_2 + \ldots = 0$.

Les questions 25 et 26 conduisent au théorème de Leibniz (n° 40). Les questions 14, 15, 16, 17 et 18, qui ont pu être traitées directement, pourront être traitées à l'aide de la proposition 26. Pour résoudre la question 25, on pourra avantageusement choisir deux axes dont l'un est parallèle à A_1A_2. L'autre sera indéterminé, et on pourra profiter de cette indétermination pour le faire passer par le point B, quand ce point existe.

27. Si OR est la résultante des deux forces OP et OQ, et si A est un point quelconque extérieur à l'angle des forces P et Q, on a entre les surfaces des triangles OAR, OAP, OAQ, la relation

$$OAR = OAP + OAQ.$$

On remarquera que ces triangles, ayant même base OA, sont mesurés par leurs hauteurs.

28. Chercher une convention de signe à établir sur les surfaces des triangles pour que la relation de la question 27 subsiste, quelle que soit la position du point A, entre les valeurs algébriques des surfaces des trois triangles.

29. Cette convention établie, démontrer ce théorème : si l'on considère des forces concourantes situées dans un même plan et leur résultante ; puis les triangles qui ont pour bases ces forces et pour sommet un point quelconque du plan, le triangle formé avec la résultante est égal à la somme algébrique des triangles qui ont pour bases les forces données.

(Théorème de Varignon.)

30. Dans un plan, faisant partie d'un solide invariable, on donne deux points A et B et deux forces AP, BQ appliquées en ces points. On fait tourner ces forces autour de leurs points d'application d'un même angle variable. Démontrer sur cette figure les propriétés suivantes :

1° L'angle des forces P et Q demeure constant ;

2° Leur point de concours M parcourt le segment capable de l'angle $(\widehat{P, Q})$ décrit sur AB comme corde ;

3° La résultante tourne du même angle que les forces P et Q ;

4° Cette rotation s'effectue autour d'un point fixe C du cercle décrit par le point M ;

5° Ce point C est tel que les cordes CA et CB sont inversement proportionnelles aux forces AP et BQ.

(d'Ocagne.)

31. Par des considérations de limites, examiner ce que deviennent les résultats de la question 30 quand les forces données P et Q deviennent parallèles.

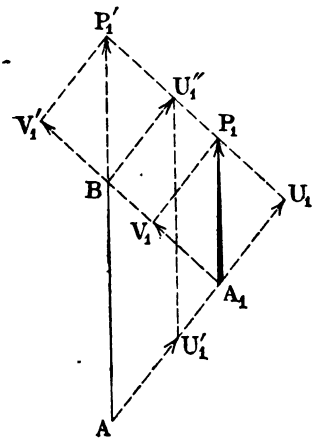
32. Si des forces données, en nombre quelconque, mais toutes situées dans un même plan ou toutes parallèles entre elles, tournent autour de leurs points d'application d'un même angle variable, leur résultante tourne du même angle autour d'un certain point fixe qu'on peut appeler le *centre des forces données*.

CHAPITRE II

FORCES PARALLÈLES. — CENTRES DE GRAVITÉ

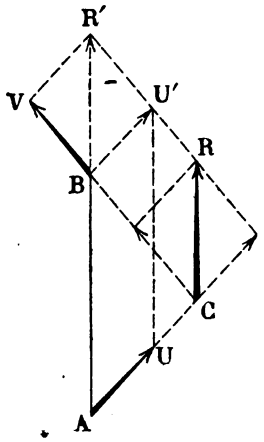
§ I. — Composition des forces parallèles.

38. **Composition d'un nombre quelconque de forces parallèles.** — Choisissons deux points A et B sur une même parallèle à la direction commune des forces données, A_1P_1, A_2P_2, ... La force A_1P_1 peut être décomposée en deux autres, A_1U_1 et A_1V_1, dirigées suivant A_1A et A_1B. Je transporte ces forces respectivement aux points A et B de leurs directions, en AU'_1 et BV'_1. En opérant de même pour les autres forces, A_2P_2, ...; j'obtiens deux systèmes de forces concourantes, les unes en A, les autres en B, et que je remplace par leurs résultantes AU et BV.



Je vais montrer comment, sauf un cas exceptionnel (cas du couple), ces deux forces AU et BV peuvent être remplacées par une force unique. Pour cela, je transporte parallèlement à eux-mêmes en un point

quelconque, par exemple au point B, les parallélogrammes des forces $P_1U_1V_1$, $P_2U_2V_2$, ... Soient $P'_1U''_1V'_1$, $P'_2U''_2V'_2$, ... les forces ainsi transportées. Les forces P'_1, P'_2, ..., sont toutes dirigées suivant la droite AB. Si donc nous réservons le cas exceptionnel où leur somme algébrique serait nulle, elles ont une résultante BR′ dirigée suivant AB (23). Or, je peux obtenir cette résultante BR′ d'une autre façon. En composant U''_1, U''_2, ..., j'obtiens une résultante BU′ égale et parallèle à AU; en composant ensuite V'_1, V'_2,..., j'obtiens BV.



Les deux forces BU′ et BV ont donc pour résultante BR′, dirigée suivant AB. Par suite la droite AB est dans le plan BU′V. La droite AU est aussi dans ce plan. Les directions des forces AU et BV se rencontrent alors en un point C. Ces forces ont donc une résultante CR appliquée au point C, parallèle à BR′ c'est-à-dire à la direction des forces données, égale à BR′ c'est-à-dire à la somme algébrique des forces données, comptées positivement, par exemple, dans le sens AB (23 et 24).

Nous allons montrer que la position du point C est indépendante de la direction commune des forces et aussi du choix des points A et B.

39. **Centre des forces parallèles.** — Les deux triangles AA_1B, $A_1U_1P_1$ (1re fig. du n° 38) sont semblables comme ayant leurs côtés parallèles. Ils donnent

$$\frac{A_1U_1}{AA_1} = \frac{A_1P_1}{AB},$$

d'où

$$(1) \qquad A_1U_1 \quad \text{ou} \quad AU'_1 = AA_1 \frac{A_1P_1}{AB}.$$

Sur la figure, AB et A_1P_1 ont été supposés de même sens. Si AB était de sens contraire à A_1P_1, AU'_1 serait de sens contraire à AA_1. Imaginons qu'on change la direction commune de AB et des forces données :

1° Sans changer les points A, A_1, A_2, ... ;

2° Sans changer les longueurs AB, A_1P_1, A_2P_2, ... ;

3° En observant aussi que les forces qui étaient d'abord de même sens que AB demeurent du même sens, et que celles qui étaient de sens contraire à AB demeurent de sens contraire à AB.

D'après ces hypothèses :

1° AA_1 demeure invariable ; donc AU'_1 conserve la même direction ;

2° AA_1, AB, A_1P_1 gardent des valeurs constantes ; donc $AU'_1 = AA_1 \frac{A_1P_1}{AB}$ conserve la même grandeur ;

3° A_1P_1 demeure, par exemple, de même sens que AB ; donc AU'_1 demeure aussi de même sens que AA_1. Si A_1P_1 était de sens contraire à AB, AU'_1 demeurerait de sens contraire à AA_1.

Ainsi, la force AU'_1 demeure invariable de position et de grandeur. Il en est de même de AU'_2, ..., et par suite de la résultante AU de ces forces.

On démontrerait de même la formule

$$(2) \qquad AC = AU \cdot \frac{AB}{CR}.$$

Or, d'après l'hypothèse, AB et CR conservent des grandeurs constantes, AU est fixe d'après la première partie de la démonstration. Donc le point C est fixe. En résumé :

Lorsque les forces données pivotent autour de leurs points d'application en demeurant parallèles et conservant leurs sens

respectifs et leurs grandeurs, la résultante pivote seulement autour du point fixe C *sans changer de grandeur.*

De là résulte que le point C est entièrement déterminé : c'est le point de concours des résultantes correspondantes à toutes les directions des forces parallèles. Il est donc indépendant du choix du point A et de la longueur AB. Ce point remarquable s'appelle *centre des forces parallèles* ; il prend le nom de *centre des moyennes distances* des points A_1, A_2, ..., quand les forces appliquées en ces points sont égales entre elles. Enfin, il joue un rôle particulièrement important dans le cas des corps pesants, où il porte le nom de *centre de gravité*. Ce cas est étudié plus loin (§ 2 et suivants).

40. **Théorème de Leibniz.** — *On joint le centre* C *des forces parallèles au point d'application* A_1 *de la première force,* A_1P_1. *Sur* CA_1, *on porte un segment* CU_1 *proportionnel à* CA_1 *et à* A_1P_1. *Ce segment est porté dans le sens de* C *vers* A_1, *si* A_1P_1 *est dans le sens des forces positives, et dans le sens opposé, dans le cas contraire. Si on opère de même pour les autres forces,* A_2P_2, ..., *les forces représentées par les segments* CU_1, CU_2, ... *sont en équilibre.*

Ce théorème est une conséquence immédiate de la méthode de réduction des n°s 38 et 39. En effet, les constructions indiquées par l'énoncé du théorème sont celles qui résultent de la formule (1), (39), sauf que le point arbitraire A est remplacé par le point particulier C. Or la formule (2) donne pour la résultante des forces $A_1U'_1$, $A_2U'_2$, ... l'expression

$$(2)' \qquad AU = CR \cdot \frac{AC}{AB}.$$

L'hypothèse est ici que le point A coïncide avec le point C, c'est-à-dire que AC est nul. Dès lors la formule (2)′ montre que la résultante AU est aussi nulle. Ainsi, les

forces de l'énoncé, CU_1, CU_2, ... ont une résultante nulle ; elles sont bien en *équilibre.* C. Q. F. D.

41. Règle pratique particulière au cas de deux forces parallèles. — D'après le n° 38, la résultante CR (fig. ci-dessous) des deux forces données A_1P_1, A_2P_2, est parallèle à ces forces et égale à leur somme quand elles sont de même sens. Si elles sont de sens contraire, la résultante est égale à leur différence et dirigée dans le sens de la plus grande force. Le point d'application C de la résultante s'obtient par le théorème du n° 40. Les forces

$$CU_1 = CA_1 \times P_1, \qquad CU_2 = CA_2 \times P_2$$

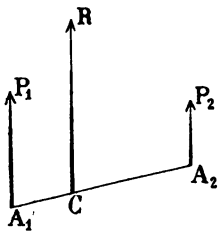
doivent se faire équilibre. Donc :

1° Le point C est sur la droite A_1A_2 ;

2° Si les forces A_1P_1 et A_2P_2 sont de même sens, les forces CU_1 et CU_2 sont portées dans le même sens respectivement que CA_1 et CA_2. Donc C doit être entre les points A_1 et A_2. Dans le cas contraire, le point C est sur l'un des deux prolongements du segment A_1A_2, du côté de la plus grande force ;

3° Les forces CU_1 et CU_2, pour se faire équilibre, doivent être égales. On aura donc

$$CA_1 \times P_1 = CA_2 \times P_2,$$



d'où l'on tire, en considérant par exemple le premier cas,

$$\frac{P_1}{CA_1} = \frac{P_2}{CA_2} = \frac{P_1 + P_2}{CA_1 + CA_2} = \frac{R}{A_1A_2}.$$

Chacune des trois forces P_1, P_2, R *est proportionnelle au segment non adjacent.*

Ce théorème se démontre de même quand les deux forces données sont de sens contraire. Il est d'une application facile et permet, par exem-

ple, de décomposer une force donnée CR en deux autres parallèles à la première et dont l'une est donnée.

42. **Application à la composition d'un nombre quelconque de forces parallèles.** — Soient les forces :

A_1P_1, A_2P_2, ..., dirigées dans un sens ;

$A'_1P'_1$, $A'_2P'_2$, ..., dirigées en sens inverse.

Les forces A_1P_1 et A_2P_2 ont une résultante B_2Q_2 donnée par la règle précédente (41) ; B_2Q_2 et A_3P_3 de même, et ainsi de suite. On arrivera ainsi à remplacer les forces dirigées dans le premier sens par une résultante BQ. De même, les forces dirigées en sens contraire ont une résultante B'Q'.

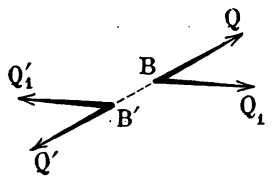
Ici plusieurs cas se présentent :

1° BQ *et* B'Q' *sont inégales.*

Elles admettent une résultante CR donnée par la règle précédente.

2° BQ *et* B'Q' *sont égales et non directement opposées.*

N'étant pas directement opposées, elles ne se font pas équilibre (19). Nous verrons qu'elles ne peuvent pas être remplacées par une force unique (94). On dit qu'elles forment un *couple*. La théorie des couples sera faite plus loin (chap. III, § 2).



Enfin, si elles sont *égales et directement opposées*, il y a équilibre. Ce cas se décompose en deux autres :

3° *Les points* B *et* B' *sont distincts.*

L'équilibre est dit *astatique*, parce que, si l'on change la direction des forces, les nouvelles forces BQ_1, $B'Q'_1$ ne se font plus équilibre.

4° *Les points* B *et* B' *se confondent.*

L'équilibre est dit *statique* : il subsiste quand on change la direction commune des forces parallèles.

* 43. **Expressions analytiques.** — 1° *Cas général des forces parallèles.* — Soient P_1, P_2, ... les valeurs algébriques des forces données. On aura d'abord, pour la valeur algébrique R de la résultante,

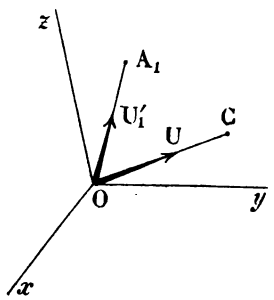
$$R = P_1 + P_2 + \cdots\cdots = \Sigma P_1.$$

Pour repérer les points d'application des forces, je choisis arbitrairement trois axes coordonnés, Ox, Oy, Oz.

Soient

$$\left.\begin{array}{l} x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots \\ y_1,\ y_2,\ \ldots\ldots \\ z_1,\ z_2,\ \ldots\ldots \end{array}\right\}$$ les coordonnées des points d'application, $A_1, A_2, \ldots\ldots$ des forces données.

J'applique les résultats des nos 38 et 39, en supposant le point arbitraire A placé au point O et le segment arbitraire AB égal à l'unité. La formule (1), n° 39, donne alors



$$\overline{OU'_1} = \overline{OA_1}.P_1.$$

Or les segments $\overline{OU'_1}$ et $\overline{OA_1}$ sont proportionnels à leurs projections sur Ox, parallèlement au plan yOz. On a donc cette formule

$$\text{proj. } OU'_1 = \text{proj. } OA_1.P_1.$$

Remplaçant proj. OA_1 par sa valeur x_1 et opérant de même pour les autres forces, il vient

$$\text{proj. } OU'_1 = x_1P_1,$$
$$\text{proj. } OU'_2 = x_2P_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Soient maintenant x, y, z les coordonnées du centre C des forces parallèles. Par l'application de la formule (2), n° 39, on obtient de même, pour la résultante OU de ces forces OU'_1, OU'_2, ...

$$\text{proj. } OU = x.R.$$

Écrivons maintenant que la projection de la résultante OU est égale à la somme algébrique des projections des composantes OU'_1, OU'_2, ... Il vient, en remplaçant R par sa valeur ΣP_1,

$$x.\Sigma P_1 = x_1P_1 + x_2P_2 + \cdots\cdots = \Sigma x_1P_1.$$

De cette formule, on tire pour x une valeur qui, jointe à celle qu'on obtiendrait de même pour y et z, donne les coordonnées

du centre C des forces parallèles, savoir

$$x = \frac{\Sigma x_1 P_1}{\Sigma P_1}, \qquad y = \frac{\Sigma y_1 P_1}{\Sigma P_1}, \qquad z = \frac{\Sigma z_1 P_1}{\Sigma P_1}.$$

Remarque. — Si les nombres P_1, P_2, ... sont tous égaux et en nombre n, il vient

$$x = \frac{P_1 \Sigma x_1}{n P_1} = \frac{\Sigma x_1}{n},$$

ce qui exprime que x est la moyenne arithmétique entre x_1, x_2, ...

La distance du point C *au plan quelconque* yz, *comptée parallèlement à la direction quelconque* Ox, *et positivement dans le sens* Ox, *est moyenne arithmétique entre les distances des points* A_1, A_2, ... *au même plan, comptées de même.*

Cette propriété explique le nom de centre des moyennes distances donné dans ce cas au point C (39).

2° *Cas où la somme algébrique des forces données est nulle,* $\Sigma P_1 = 0$. *Cas du couple.* — J'appliquerai la méthode du n° 42. Pour éviter la confusion, je désignerai par S les sommes relatives aux forces dirigées dans un même sens, par Σ les sommes algébriques s'étendant à toutes les forces, positives et négatives ; les lettres qui se rapportent à ces forces négatives seront, comme au n° 42, distinguées par un accent. On aura

$$0 = \Sigma P_1 = S(P_1) + S(P_1').$$

Les forces positives ont une résultante dont la valeur algébrique Q et le point d'application B (α, β, γ) sont donnés par les formules établies au premier cas et qui s'écrivent ici

$$(2) \quad Q = S(P_1), \quad \alpha = \frac{S(x_1 P_1)}{S(P_1)}, \quad \beta = \frac{S(y_1 P_1)}{S(P_1)}, \quad \gamma = \frac{S(z_1 P_1)}{S(P_1)}.$$

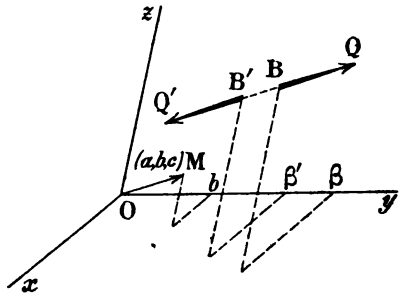
La résultante Q′ des forces négatives et son point d'application B′ (α', β', γ') sont

$$(2)' \quad Q' = S(P_1'), \quad \alpha' = \frac{S(x_1' P_1')}{S(P_1')}, \quad \beta' = \frac{S(y_1' P_1')}{S(P_1')}, \quad \gamma' = \frac{S(z_1' P_1')}{S(P_1')}.$$

En général, ces forces Q et Q′ forment un couple.

3° *Équilibre astatique.* — Au lieu du couple, il y aura équilibre astatique, si, outre l'hypothèse $\Sigma P_1 = 0$, on suppose que BB′ est parallèle à la direction des forces données.

Pour exprimer cette nouvelle condition, menons une droite OM égale à $+1$, parallèle à la direction des forces, et écrivons que les segments OM et B'B sont proportionnels à leurs projections sur les trois axes ; on aura ainsi, en désignant par a, b, c les trois projections de OM qui sont les coefficients angulaires de la direction des forces, et remarquant que les projections de B'B sont $\alpha - \alpha'$, $\beta - \beta'$, $\gamma - \gamma'$,



$$\frac{\overline{B'B}}{\overline{OM}} = \frac{\alpha - \alpha'}{a} = \frac{\beta - \beta'}{b} = \frac{\gamma - \gamma'}{c},$$

ou, en suppprimant le premier rapport, et remplaçant les numérateurs par leurs valeurs déduites des formules (2) et (2'),

$$\frac{\dfrac{S(P_1x_1)}{S(P_1)} - \dfrac{S(P'_1x'_1)}{S(P'_1)}}{a} = \frac{\dfrac{S(P_1y_1)}{S(P_1)} - \dfrac{S(P'_1y'_1)}{S(P'_1)}}{b} = \frac{\dfrac{S(P_1z_1)}{S(P_1)} - \dfrac{S(P'_1z'_1)}{S(P'_1)}}{c}.$$

En remplaçant $S(P'_1)$ par $-S(P_1)$, chassant le dénominateur $S(P_1)$, remplaçant $S(P_1x_1) + S(P'_1x'_1)$ par ΣP_1x_1 et opérant de même pour les deux derniers rapports, il vient enfin

$$\frac{\Sigma P_1x_1}{a} = \frac{\Sigma P_1y_1}{b} = \frac{\Sigma P_1z_1}{c}.$$

4° *Équilibre statique.* — L'équilibre est statique si les points B et B' coïncident, c'est-à-dire si l'on a

$$\frac{S(P_1x_1)}{S(P_1)} = \frac{S(P'_1x'_1)}{S(P'_1)}, \quad \frac{S(P_1y_1)}{S(P_1)} = \frac{S(P'_1y'_1)}{S(P'_1)}, \quad \frac{S(P_1z_1)}{S(P_1)} = \frac{S(P'_1z'_1)}{S(P'_1)}.$$

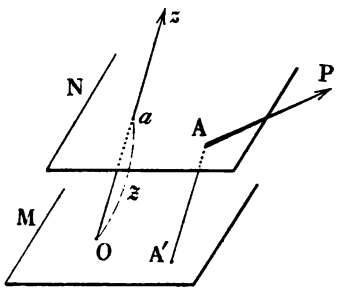
Remplaçant $S(P'_1)$ par $-S(P_1)$, chassant le dénominateur $S(P_1)$, faisant passer les seconds membres dans les premiers, et tenant compte de la notation précédente, il vient

$$\Sigma P_1x_1 = 0, \qquad \Sigma P_1y_1 = 0, \qquad \Sigma P_1z_1 = 0.$$

Résumé de la discussion.

(I) $\Sigma P_1 \neq 0$,		résult. uniq.
(II) $\Sigma P_1 = 0$	1° sans autre condition,	couple.
	2° $\frac{\Sigma P_1 x_1}{a} = \frac{\Sigma P_1 y_1}{b} = \frac{\Sigma P_1 z_1}{c}$,	éq. astatique.
	3° $\Sigma P_1 x_1 = 0$, $\Sigma P_1 y_1 = 0$, $\Sigma P_1 z_1 = 0$,	éq. statique.

*** 44. Moments des forces parallèles par rapport à un plan. — Définitions.** — Considérons un plan M, une droite Oz donnée en direction et sens, et perçant le plan M au point O qui sera pris pour origine sur la droite Oz ; enfin une force AP *appliquée au point* A *de sa direction*. Projetons le point A en a sur Oz à l'aide d'un plan parallèle à M. On appelle *moment de* AP *par rapport au plan* M *et à la direction* Oz le produit



$$\overline{Oa} \times P.$$

On n'applique cette notion qu'aux forces parallèles, de sorte que P est positif ou négatif, suivant que la force AP est dirigée dans un sens ou dans l'autre.

Remarques. — 1° On peut se dispenser de considérer la projection a de A en menant par le point A une parallèle AA' à Oz et en remplaçant $\overline{Oa}$ par la quantité égale $\overline{A'A}$, $\overline{A'A}$ représentant la longueur de cette parallèle précédée du signe + ou du signe — suivant que A'A est dirigé dans le sens Oz ou en sens inverse, ou, ce qui revient au même ici, suivant que le point A est au-dessus ou au-dessous du plan M. $\overline{A'A}$ s'appelle le *bras de levier* de la force.

2° Il est nécessaire en général pour appliquer cette notion de fixer le point A *en un point déterminé de la direction de la force* AP ; car autrement le segment $\overline{A'A}$ serait variable. Cela devient inutile si les forces sont parallèles au plan M ; car alors $\overline{A'A}$ ne change pas.

* **45. Théorème.** — *Lorsque des forces parallèles ont une résultante, le moment de cette résultante égale la somme algé-*

brique des moments des composantes par rapport à un même plan M *et une même direction* Oz.

Considérons en effet trois axes concourants en un point O quelconque du plan M, l'un Oz et les deux autres Ox, Oy quelconques dans le plan M, et soient :

P_1, P_2, ..., R les forces et leur résultante;

z_1, z_2, ..., z les bras de levier de ces forces, ou, ce qui revient au même, les z des points d'application; on aura, d'après les formules qui donnent le centre des forces parallèles,

$$z = \frac{\Sigma P_1 z_1}{\Sigma P_1},$$

ou, en chassant le dénominateur ΣP_1 et le remplaçant par son égal R,

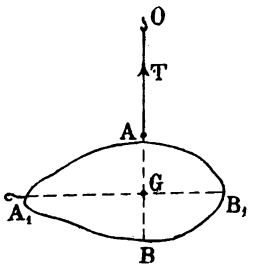
$$Rz = \Sigma P_1 z_1. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

§ II. — Centres de gravité : Définitions et propriétés générales.

46. Centre de gravité d'un corps. — Si l'on considère un corps solide, on observe qu'il est pesant, c'est-à-dire soumis à une force verticale agissant de haut en bas. Partageons-le en autant de parties que nous voulons : toutes ces parties sont pesantes; on peut donc considérer un corps comme formé d'une infinité de points matériels pesants. Pour un corps de dimensions très petites par rapport à la terre, ces poids sont des forces sensiblement parallèles; dès lors ils ont une résultante égale à leur somme et appliquée au centre des forces parallèles, qu'on appelle ici *centre de gravité*.

Ce point, comme on sait (39), est indépendant de la direction commune des forces parallèles : celle-ci est fixe, il est vrai; mais si on varie l'orientation du corps relativement à la pesanteur, cette direction change par rapport au corps. Ainsi, *quelle que soit l'orientation du corps, son poids est toujours appliqué en un point fixe, le centre de gravité.*

* 47. **Détermination expérimentale du centre de gravité.** — Soit le corps C; on le suspend à un fil OA par un de ses points, A. Ce corps est en équilibre sous l'action de deux forces, son poids P appliqué au centre de gravité G, et la tension du fil AT; donc le prolongement AB de AT passe par le point G. Imaginons qu'on marque cette direction dans le corps; suspendons-le maintenant par un second point, A_1; le point G se trouvera de même dans la direction A_1B_1 du fil prolongé dans cette nouvelle position du corps; il est donc à l'intersection des deux directions AB et A_1B_1 marquées dans le corps.



Remarques. — 1° En réalité on ne peut pas marquer les directions AB, A_1B_1 dans le corps; mais l'expérience précédente fournit en général des renseignements suffisants sur la position du centre de gravité.

2° Dans ce qui suit, on traitera du centre de gravité, non des corps, mais des volumes, des surfaces et des lignes.

48. **Définitions.** — On appelle :

corps homogène, un corps tel que les poids de ses différentes parties sont proportionnels à leurs volumes;

corps hétérogène, tout corps qui ne satisfait pas à cette condition;

centre de gravité d'un volume, celui d'un corps homogène qui remplirait ce volume;

centre de gravité d'une surface, celui d'une couche d'épaisseur constante et infiniment petite d'un corps homogène répandu sur cette surface;

centre de gravité d'une ligne, celui d'un corps homogène, ayant la forme d'un tube de section constante et infiniment petite, et qui aurait pour axe cette ligne.

Ainsi, pour concevoir le centre de gravité d'un volume, d'une surface ou d'une ligne, on peut imaginer qu'à chaque élément est appliqué un poids proportionnel à son volume,

sa surface ou sa longueur ; les résultats ainsi obtenus servent dans la pratique pour les corps sensiblement homogènes, pour les lames et les tiges minces.

49. **Définitions.** — Nous renverrons au cours de géométrie pour l'étude de *deux* figures symétriques par rapport à un point, à un axe ou à un plan ; rappelons toutefois que, dans deux figures symétriques, les lignes, les surfaces et les volumes correspondants ont des mesures égales.

On dit qu'*une* figure est *symétrique* par rapport à un centre, à un axe ou à un plan, lorsque ses points sont deux à deux symétriques par rapport à ce point, cet axe ou ce plan.

50. **Théorème.** — *Si une figure quelconque, volume, surface, ligne ou ensemble de points a un centre, un axe ou un plan de symétrie, son centre de gravité est en ce centre, sur cet axe ou dans ce plan.*

En effet, on peut décomposer la figure en éléments deux à deux *symétriques et égaux*; par suite les poids de deux éléments symétriques sont égaux, et le point d'application de leur résultante est au milieu de la droite qui joint ces éléments, c'est-à-dire au centre, sur l'axe ou dans le plan de symétrie. Par suite, le point d'application de la résultante totale, c'est-à-dire le centre de gravité, satisfait à la même condition.

C. Q. F. D.

Pour généraliser ce théorème, nous allons d'abord donner quelques notions nouvelles de géométrie.

51. **Définitions.** — On dit que :

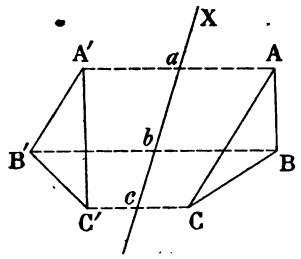
une droite est un *diamètre* d'une figure plane, si les points de cette figure peuvent être groupés deux à deux de façon que les droites qui joignent des points correspondants soient parallèles et coupées en leurs milieux par la droite ;

un plan est un *plan diamétral* d'une figure, si les points

de cette figure peuvent être groupés deux à deux de façon que les droites qui joignent des points correspondants soient parallèles et coupées en leurs milieux par le plan.

* 52. **Théorème.** — *Si une figure plane a un diamètre, les portions de surface correspondantes sont équivalentes.*

Soit le diamètre X ; je dis que les deux triangles correspondants ABC, A'B'C' sont équivalents. En effet, les cordes AA', BB', CC' sont parallèles et coupées par X en leurs milieux a, b, c.



Dès lors deux trapèzes correspondants quelconques, abAB, abA'B' par exemple, ont même mesure, car ils ont même hauteur et des bases respectivement égales :

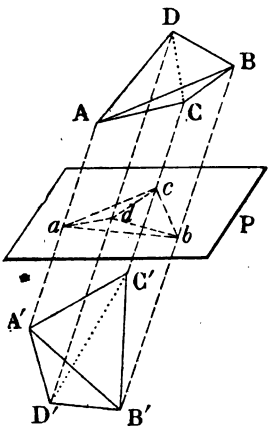
$$aA = aA', \qquad bB = bB' ;$$

on a donc

$$ab\mathrm{AB} + bc\mathrm{BC} - ac\mathrm{AC} \quad \text{ou} \quad \mathrm{ABC} =$$
$$ab\mathrm{A'B'} + bc\mathrm{B'C'} - ac\mathrm{A'C'} \quad \text{ou} \quad \mathrm{A'B'C'}.$$

Deux triangles correspondants étant équivalents, deux polygones correspondants, décomposables en triangles équivalents, le sont aussi, et par des considérations de limites on étendrait le théorème au cas d'aires planes quelconques.

C. Q. F. D.



* 53. **Théorème.** — *Si une figure a un plan diamétral, deux volumes correspondants sont équivalents.*

Par un raisonnement analogue au précédent, on voit qu'il suffit de démontrer le théorème pour deux tétraèdres correspondants. Soit P le plan diamétral ; ABCD, A'B'C'D' deux tétraèdres correspondants, c'est-à-dire que les droites AA', BB', CC', DD' sont parallèles et coupées par le plan P en leurs milieux a, b, c, d. Deux troncs

de prisme correspondants quelconques, *abc*ABC, *abc*A'B'C' par exemple, sont équivalents : les trois pyramides dont ils valent chacun la somme ont en effet des mesures égales chacune à chacune, car ces pyramides ont même base *abc* et des hauteurs respectivement égales, les perpendiculaires abaissées sur le plan P des points A et A', B et B', C et C'. On a donc, en se bornant au cas de figure où le point *d* tombe à l'intérieur du triangle *abc*, et où les points D et D' sont extérieurs au tronc de prisme BCAB'C'A',

$$abd\mathrm{ABD} + bcd\mathrm{BCD} + cad\mathrm{CAD} - abc\mathrm{ABC} \quad \text{ou} \quad \mathrm{ABCD} =$$
$$abd\mathrm{A'B'D'} + bcd\mathrm{B'C'D'} + cad\mathrm{C'A'D'} - abc\mathrm{A'B'C'} \quad \text{ou} \quad \mathrm{A'B'C'D'}.$$

C. Q. F. D.

Si la figure était disposée autrement, la démonstration se ferait de même, seulement il faudrait voir quel signe on devrait prendre devant chaque tronc de prisme pour que la somme algébrique fût égale au tétraèdre ABC.

54. **Théorème** (extension du théorème 50). — *Si une aire plane admet un diamètre, si un volume admet un plan diamétral, le centre de gravité de cette aire ou de ce volume est sur le diamètre ou dans le plan diamétral.*

En effet, l'aire plane, par exemple, peut être décomposée en éléments correspondants; deux éléments correspondants étant égaux et par suite de même poids, le point d'application de la résultante de ces poids est au milieu de la droite qui joint les éléments, c'est-à-dire sur le diamètre; donc le point d'application de la résultante totale, c'est-à-dire le centre de gravité de l'aire plane, est aussi sur ce diamètre.

C. Q. F. D.

On démontrerait de même la propriété du plan diamétral.

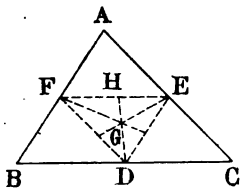
55. **Remarque.** — Le centre de gravité d'une *ligne plane* qui a un diamètre n'est pas forcément sur ce diamètre : c'est que les éléments correspondants n'ayant pas en général même longueur, le raisonnement précédent est en défaut. Ainsi on verra plus loin que le centre de gravité de l'aire d'un triangle est sur une médiane qui est un diamètre

de ce triangle, tandis que le centre de gravité du périmètre ne s'y trouve pas.

De même, le centre de gravité d'une surface qui a un plan diamétral n'est pas nécessairement dans ce plan.

* § III. — Centres de gravité de lignes.

* 56. **Contour triangulaire. — Théorème.** — *Le centre de gravité du contour d'un triangle est le point de rencontre des bissectrices du triangle qui a pour sommets les milieux des côtés du premier.*



Soit le triangle ABC. Les poids des côtés BC, CA, AB sont des forces proportionnelles à ces côtés, appliquées en leurs milieux D, E, F.

Je figure le triangle DEF; soit H le point d'application de la résultante des poids appliqués en E, F; on aura

$$\frac{HE}{HF} = \frac{AB}{AC} = \frac{2DE}{2DF},$$

ou

$$\frac{HE}{HF} = \frac{DE}{DF}.$$

Donc DH est la bissectrice de l'angle D du triangle DEF. Le centre de gravité, qui s'obtiendra en composant les forces appliquées en D et H, est sur cette droite ; de même il se trouve aussi sur les bissectrices des angles E, F ; il est donc à l'intersection des trois bissectrices du triangle DEF.

C. Q. F. D.

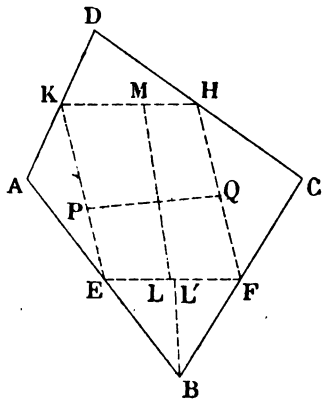
Corollaire. — Les trois bissectrices d'un triangle concourent en un même point.

* 57. **Contour quadrilatère.** — Soit le quadrilatère ABCD.

Les poids des côtés AB, BC, CD, DA sont des forces proportionnelles à ces côtés, appliquées en leurs milieux E, F, H, K.

Soit L le point d'application de la résultante des poids de AB et BC. On aura

$$\frac{LE}{LF} = \frac{BC}{AB}.$$

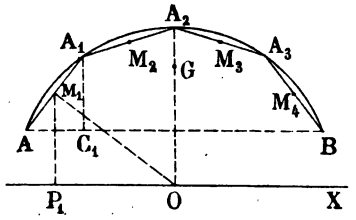


D'ailleurs, si on mène la bissectrice BL' de l'angle B, on aura

$$\frac{L'F}{L'E} = \frac{BF}{BE} = \frac{BC}{AB};$$

donc, pour avoir le point L, il suffit de porter, à partir du point E, EL = FL'. J'obtiendrai d'une façon semblable le point M d'application de la résultante des poids de DA, DC. Il restera, pour avoir le centre de gravité, à composer les poids appliqués en L et M ; celui-ci est donc sur LM. De même il se trouve sur une droite PQ qu'on obtient comme LM ; il est donc à l'intersection des droites LM et PQ.

* 58. **Contour polygonal régulier. — Théorème.** — *Le centre de gravité d'une ligne brisée régulière est sur le rayon moyen, à une distance du centre égale à la quatrième proportionnelle entre le périmètre, la corde et l'apothème.*



Soit le contour polygonal régulier $AA_1A_2A_3B$, de centre O.

D'abord le centre de gravité G se trouve sur le rayon OG perpendiculaire sur le milieu de la corde AB, car ce rayon est un axe de symétrie (50). Pour trouver sa distance au point O, nous prendrons les moments par rapport à la direction OG et à un plan passant par la parallèle OX à AB menée par le point O. Les poids des côtés, appliqués en leurs milieux M_1, M_2, M_3, M_4, sont proportionnels à ces côtés et on peut les supposer mesurés par les mêmes nombres. Pour avoir le moment du côté AA_1 par

exemple, je mène le bras de levier M_1P_1 ; j'aurai

$$(1) \qquad \text{mom}^t\ AA_1 = AA_1 \times M_1P_1.$$

Pour transformer cette expression, je joins les points O et M_1 et par les points A et A_1 je mène des parallèles AC_1, A_1C_1 respectivement à OX et OG ; j'aurai dans les triangles semblables AA_1C_1, OM_1P_1,

$$\frac{AA_1}{OM_1} = \frac{AC_1}{M_1P_1},$$

d'où

$$(2) \qquad AA_1 \times M_1P_1 = OM_1 \times AC_1.$$

Portant cette valeur dans l'égalité (1), remarquant que OM_1 est l'apothème r du polygone, que AC_1 égale la projection de AA_1 sur AB, laquelle nous désignerons par pr. AA_1, et appliquant l'expression trouvée aux moments des autres côtés, il vient

$$\text{mom}^t\ AA_1 = r \times \text{pr. } AA_1,$$

$$\text{mom}^t\ A_1A_2 = r \times \text{pr. } A_1A_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Ajoutant ces égalités membre à membre, il vient

$$\text{mom}^t\ AA_1 + \text{mom}^t\ A_1A_2 + \cdots = r \times (\text{pr. } AA_1 + \text{pr. } A_1A_2 + \cdots).$$

La parenthèse du second membre égale la corde AB, que nous désignerons par c ; la somme des moments des composantes est donc rc ; d'ailleurs la résultante, ou le poids total, est le périmètre p du polygone ; son bras de levier est OG, que nous désignerons par x ; on a donc, d'après le théorème des moments,

$$px = rc,$$

d'où

$$x = \frac{rc}{p},$$

formule qui démontre le théorème.

* 59. **Arc de cercle. — Théorème.** — *Le centre de gravité d'un arc de cercle est sur le rayon moyen, à une distance du centre égale à la quatrième proportionnelle entre l'arc, la corde et le rayon.*

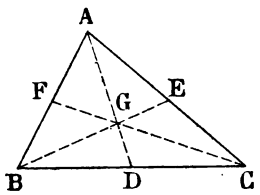
Soit l'arc de cercle AB ayant pour rayon R, pour longueur a et pour corde c. Si dans cet arc j'inscris une ligne brisée régulière, son centre de gravité sera sur le rayon moyen, à une distance du centre égale à $\frac{rc}{p}$ (58). Si on augmente indéfiniment le nombre des côtés de la ligne inscrite, son périmètre p a pour

limite l'arc a, r a pour limite R, enfin le centre de gravité du contour polygonal a pour position limite celui de l'arc. Donc le centre de gravité de l'arc se trouve sur le rayon moyen, à une distance du centre donnée par la formule

$$x = \frac{Rc}{a}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

§ IV. — Centres de gravité de surfaces.

60. **Triangle. — Théorème.** — *Le centre de gravité de l'aire d'un triangle est au point de rencontre des médianes.*



Soit le triangle ABC ; je mène la médiane AD ; c'est un diamètre pour des cordes parallèles à BC ; donc le centre de gravité G est sur cette médiane. De même il se trouve sur les médianes BE, CF ; il est donc à leur intersection.

C. Q. F. D.

Corollaire. — Les trois médianes d'un triangle concourent en un même point.

61. **Théorème.** — *Le centre de gravité d'un triangle est le centre des moyennes distances de ses trois sommets.*

Si en effet on suppose en A, B, C des poids égaux, la résultante des poids B et C est appliquée au milieu D de BC. Reste à composer les poids appliqués en A et D : le point d'application de leur résultante, qui est le centre des moyennes distances des trois sommets, est donc sur la médiane AD ; de même il est sur les deux autres médianes ; donc il coïncide avec le centre de gravité de l'aire du triangle.

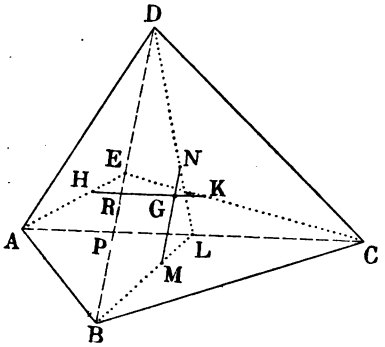
C. Q. F. D.

Remarque. — Le point G étant le point d'application de la résultante des poids appliqués en A et D et qui sont dans le rapport de 1 à 2, on a

$$\frac{GD}{GA} = \frac{1}{2}, \qquad \text{d'où} \qquad GD = \frac{1}{3} AD.$$

Corollaire. — Les médianes d'un triangle se coupent au tiers de chacune d'elles à partir de la base.

62. **Quadrilatère.** — Soit le quadrilatère ABCD : je mène les diagonales AC, BD ; je joins A et C au milieu E de BD. Les poids des triangles ABD, BCD sont appliqués respectivement aux points H et K qui sont aux tiers des médianes EA, EC, à partir du point E ; donc le centre de gravité du quadrilatère, qui est le point d'application de la résultante des poids des deux triangles appliqués en H et K, est sur la droite HK. De même je joins les points B et D au milieu L de AC et je prends les points M et N respectivement aux tiers de LB et de LD à partir du point L. Le centre de gravité sera sur MN ; il est donc à l'intersection G des droites HK, MN.



* *2e Méthode.* — On a (41)

$$\frac{GH}{GK} = \frac{\text{tr. BCD}}{\text{tr. ABD}};$$

mais les deux triangles BCD, ABD, ayant même base BD, sont entre eux comme leurs hauteurs. Or celles-ci sont entre elles comme les segments PC et PA déterminés sur la diagonale AC par la diagonale BD ; on a donc

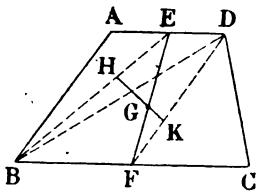
$$\frac{GH}{GK} = \frac{PC}{PA}.$$

Si j'appelle R le point d'intersection de BD avec HK, le dernier rapport est égal à $\frac{RK}{RH}$. On a donc

$$\frac{GH}{GK} = \frac{RK}{RH}, \qquad \text{d'où} \qquad GK = RH.$$

Donc pour avoir le point G, il suffit, après avoir tracé HRK, de porter sur cette droite, à partir du point K, la longueur KG égale à RH.

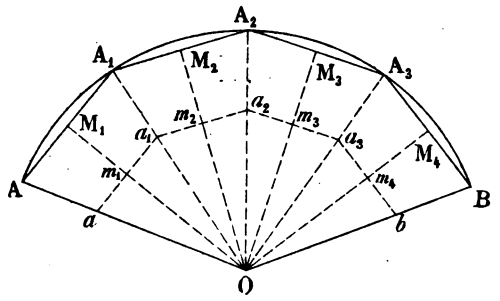
63. **Trapèze.** — Soit le trapèze ABCD : on peut d'abord appliquer une des méthodes données pour le quadrilatère, en déterminant le centre de gravité G par l'intersection de deux des lieux géométriques trouvés (62). Mais on simplifie encore ici en remarquant que la droite qui joint les milieux E, F des bases AD, BC est un nouveau lieu du point G ; car EF est un diamètre pour des cordes parallèles aux bases. L'intersection de EF avec la droite qui joint les centres de gravité H, K des triangles ABD, BDC donne le point G.



*64. **Secteur polygonal régulier. — Théorème.** — *Le centre de gravité de l'aire du secteur polygonal régulier est sur le rayon moyen, à une distance du centre égale aux $^2/_3$ de la quatrième proportionnelle entre le périmètre, la corde et l'apothème.*

Soit le secteur polygonal régulier $OAA_1A_2A_3B$. Je le décompose en triangles par les rayons qui aboutissent aux sommets et je prends les milieux M_1, M_2, M_3, M_4 des bases de ces triangles. Le centre de gravité du triangle OAA_1 est en m_1, aux $^2/_3$ de OM_1 à partir du point O ; j'obtiens de même les centres de gravité m_2, m_3, m_4 des autres triangles : ces points pourront s'obtenir en prenant le point a aux $^2/_3$ de OA, en menant par ce point aa_1 parallèle à AA_1 ; par a_1, a_1a_2 parallèle à A_1A_2, etc., et en prenant les milieux des côtés aa_1, a_1a_2, etc. D'ailleurs les poids

appliqués en m_1, m_2, m_3, m_4 sont égaux puisque les triangles le sont eux-mêmes ; donc le centre de gravité résultant de tous ces poids est celui du contour polygonal $aa_1a_2a_3b$. Donc le centre de



gravité cherché est sur le rayon moyen OG, à une distance du centre (58)

$$(1) \qquad x = \frac{Om_1 \times ab}{aa_1a_2a_3b}.$$

Mais le second polygone est semblable au premier, et le rapport de similitude est $\frac{2}{3}$; on a donc

$$Om_1 = {}^2/_3\,OM_1, \quad ab = {}^2/_3\,AB, \quad aa_1a_2a_3b = {}^2/_3\,AA_1A_2A_3B.$$

Si on porte ces valeurs dans la formule (1), en désignant par r, c et p l'apothème, la corde et le périmètre du grand polygone, il vient

$$x = \frac{{}^2/_3 r \times {}^2/_3 c}{{}^2/_3 p},$$

ou

$$x = \frac{2}{3} \cdot \frac{r.c}{p},$$

ce qui démontre le théorème.

*65. **Secteur circulaire. — Théorème.** — *Le centre de gravité du secteur circulaire est sur le rayon moyen, à une distance du centre égale aux* $^2/_3$ *de la quatrième proportionnelle entre l'arc, la corde et le rayon.*

Dans le secteur circulaire, j'inscris un secteur polygonal régulier ; le centre de gravité de celui-ci est sur le rayon moyen, à une distance du centre (64)

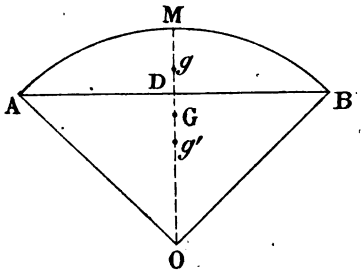
$$x = \frac{2}{3}\frac{rc}{p}.$$

Si j'augmente indéfiniment le nombre des côtés du secteur inscrit, c reste constamment égal à la corde de l'arc, r et p ont pour limites respectivement le rayon R et la longueur a de l'arc. D'ailleurs, le secteur polygonal ayant pour limite le secteur circulaire, x a pour limite la distance du centre de gravité de celui-ci au point O ; cette distance est donc donnée par la formule

$$x = \frac{2}{3} \cdot \frac{Rc}{a}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

* **66. Segment de cercle. — Théorème.** — *Le centre de gravité du segment de cercle est sur le rayon moyen, à une distance du centre égale au cube de la corde divisé par 12 fois la surface du segment.*

Soit le segment AMB, et soit ODM le rayon moyen ; le centre de gravité G du secteur OAMB est le point d'application de la résultante du poids du segment appliqué au point cherché g et du poids du triangle OAB appliqué en son centre de gravité g' ; donc ces trois points sont en ligne droite; et comme les points g' et G sont sur le rayon moyen OM, g est aussi sur OM, ce qui est d'ailleurs évident, si on remarque que ce rayon est un axe de symétrie du segment AMB. De plus on connaît les distances des points G, g' au centre O ; on aura donc celle du point g en prenant les moments par rapport au point O. Il vient ainsi



$$OG \times \text{sect. } OAMB = Og' \times \text{tr. } OAB + Og \times \text{segm. } AMB,$$

ou en désignant le rayon par R, la corde AB par c, l'arc par a, la surface du segment par S et remplaçant OG, Og' et les surfaces par leurs valeurs connues,

$$(1) \qquad {}^2/_3 \frac{Rc}{a} \times \frac{aR}{2} = \frac{2}{3} OD \times \frac{OD \times c}{2} + Og \times S ;$$

de là on tire

$$(2) \qquad Og \times S = \frac{1}{3} c(R^2 - \overline{OD}^2).$$

Or on a dans le triangle rectangle OAD

$$R^2 - \overline{OD}^2 = \overline{AD}^2 = \frac{c^2}{4};$$

en remplaçant $R^2 - \overline{OD}^2$ par cette valeur dans l'égalité (2), il vient

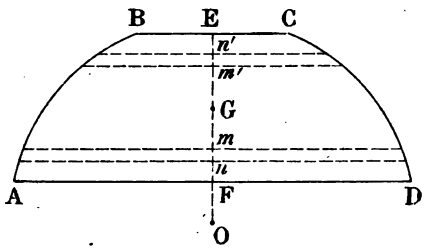
$$Og \times S = \frac{1}{3} c \times \frac{c^2}{4} = \frac{c^3}{12},$$

ou

$$Og = \frac{c^3}{12S}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

*67. **Zone. — Théorème.** — *Le centre de gravité d'une zone est au milieu de la hauteur de cette zone.*

Soit, dans la sphère O, la zone ABCD. D'abord le centre de gravité est sur la hauteur EF, qui est un axe de symétrie de la zone, Cela posé, je considère deux zones mn, $m'n'$ de même hauteur, équidistantes du milieu G de EF : elles ont même mesure, donc leurs poids sont *égaux* ; ces poids sont appliqués en des points



p, p' situés sur EF, à l'intérieur de ces zones ; si donc ont fait tendre vers zéro la hauteur commune, on aura

$$\lim Gp = \lim Gp' ;$$

donc le point d'application de la résultante de ces poids a pour position limite le point G.

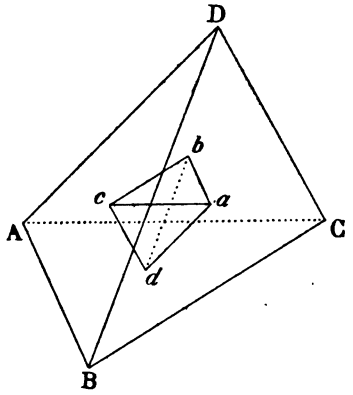
Ainsi on pourra décomposer la surface ABCD en zones telles que le centre de gravité de chaque couple a pour position limite le point G quand on augmente indéfiniment le nombre des divisions ; donc le centre de gravité total est au milieu G de EF.

C. Q. F. D.

*68. **Surface du tétraèdre. — Théorème.** — *Le centre de gravité de la surface d'un tétraèdre est le centre de la sphère inscrite dans le tétraèdre qui a pour sommets les centres de gravité des faces du tétraèdre donné.*

Soit le tétraèdre ABCD : aux centres de gravité a, b, c, d des faces sont appliqués des poids mesurés par ces faces. Je forme le

tétraèdre *abcd*; soit E le centre des forces parallèles appliquées en *c*, *d*; on aura



$$\frac{Ec}{Ed} = \frac{ABC}{ABD} = \frac{abc}{abd}.$$

Donc le plan *ab*E est le plan bissecteur du dièdre *ab*. Il nous reste à composer les poids appliqués en *a*, *b*, E; le centre de gravité est donc dans le plan de ces trois points, c'est-à-dire dans le plan bissecteur *ab*E; de même il se trouve dans les cinq autres plans bissecteurs; il est donc à leur intersection, c'est-à-dire au centre de la sphère inscrite dans le tétraèdre *abcd*.

C. Q. F. D.

Corollaire. — Les six plans bissecteurs intérieurs des dièdres d'un tétraèdre concourent en un même point.

* § V. — Applications géométriques des centres de gravité des surfaces.

* 69. **Théorème** — *Le centre de gravité d'une aire plane se projette au centre de gravité de la projection de cette aire.*

D'abord le théorème est évident pour une surface à centre telle qu'un carré, un cercle; car la projection de la surface aura elle-même pour centre la projection du centre de la surface donnée; la projection du centre de gravité d'un triangle est aussi le centre de gravité de la projection de ce triangle, car la projection d'une médiane du premier triangle est une médiane du second.

Soit maintenant l'aire polygonale ABCDE, ayant pour centre de gravité G (fig. du n° 70). Je la décompose par les diagonales AC, AD en triangles dont je marque les centres de gravité G_1, G_2, G_3. Soient *abcde*, *g*; *ac*, *ad*; g_1, g_2, g_3 les projections des éléments précédents sur un plan: g_1, g_2, g_3 sont d'après ce qui précède les centres de gravité des triangles *abc*, *acd*, *ade*. D'ailleurs les aires des portions d'une même surface plane étant proportionnelles à leurs projections sur un même plan, les poids appliqués en g_1, g_2, g_3 sont proportionnels aux poids appliqués

en G_1, G_2, G_3, et on peut les supposer respectivement égaux à ceux-ci sans changer le point d'application de la résultante.

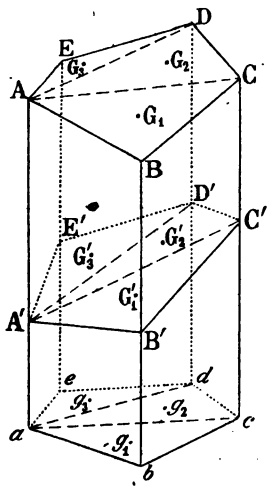
Supposons maintenant la pesanteur dirigée suivant les projetantes, dans le sens Aa pour la surface, et dans le sens aA pour sa projection ; les forces appliquées en G_1, g_1 ; G_2, g_2 ; G_3, g_3, étant égales et directement opposées, ce système supposé appliqué à un corps solide est en équilibre ; donc la résultante des forces appliquées en g_1, g_2, g_3 est directement opposée à la résultante Gg des forces appliquées en G_1, G_2, G_3. Le centre de gravité de *abcde* étant sur cette droite, est au point g où elle perce le plan P. C. Q. F. D.

S'il s'agit enfin d'une surface quelconque, on la considère comme limite d'un polygone inscrit dont les côtés tendent vers 0. On peut aussi appliquer le raisonnement précédent en considérant la surface quelconque comme limite d'une somme de triangles ou de rectangles, par exemple, qui tendent vers 0 et dont le nombre croît indéfiniment.

COROLLAIRE. — *Les centres de gravité des sections d'une surface prismatique ou cylindrique sont tous sur une même droite parallèle aux arêtes latérales ou aux génératrices.*

Car ces centres de gravité, ayant tous pour projection sur une section droite le centre de gravité de celle-ci, sont tous sur une même projetante.

* 70. **Théorème.** — *Le volume d'un tronc de prisme ou de cylindre égale le produit de sa section droite par la distance des centres de gravité des deux bases.*



Soit d'abord le tronc de prisme ABCDE A'B'C'D'E'.

Je le décompose en troncs de prisme triangulaires par les plans diagonaux ACA'C', ADA'D', et je mène la section droite *abcde*. Je désigne par s_1, s_2, s_3, s les aires des triangles de la section droite et leur somme ; par v_1, v_2, v_3, v les volumes des prismes triangulaires et du prisme total ; par γ_1, γ_2, γ_3, γ les distances des centres de gravité des triangles et des deux polygones des bases. J'aurai, d'après un théorème de géométrie,

$$(1) \quad v_1 = s_1 \times \frac{AA' + BB' + CC'}{3};$$

d'ailleurs on a (45 et 61)

$$\frac{AA' + BB' + CC'}{3} = \gamma_1.$$

En portant cette valeur dans l'égalité (1) et appliquant aux deux autres prismes l'égalité obtenue, il vient

$$v_1 = s_1\gamma_1,$$
$$v_2 = s_2\gamma_2,$$
$$v_3 = s_3\gamma_3,$$

et en ajoutant ces égalités membre à membre,

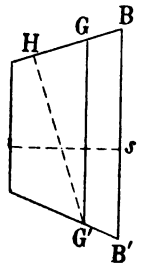
$$v = s_1\gamma_1 + s_2\gamma_2 + s_3\gamma_3.$$

D'ailleurs le second membre a pour valeur $s\gamma$ (45) ; on a donc

$$v = s.\gamma. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Le théorème s'étend au tronc de cylindre par des considérations de limites.

* 71. **Théorème.** — *Le volume d'un tronc de prisme ou de cylindre quelconque égale l'une des bases multipliée par la distance à celle-ci du centre de gravité de l'autre base.*



Soient B, B' les deux bases ; G, G' leurs centres de gravité ; je mène la section droite s, et de G' j'abaisse G'H perpendiculaire sur B ; l'angle GG'H sera égal à l'angle α de B avec s ; dès lors on a successivement, en désignant par v le volume du tronc de cylindre,

$$v = s \times GG' = (B \cos\alpha) \times GG' = B \times (GG' \cos\alpha),$$

ou enfin

$$v = B \times G'H.$$

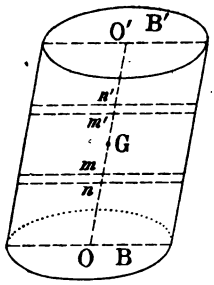
C. Q. F. D.

§ VI. — Centres de gravité de volumes.

72. **Prisme et cylindre. — Théorème.** — *Le centre de gravité d'un prisme ou d'un cylindre est au milieu de la droite qui joint les centres de gravité des deux bases.*

Soit par exemple un cylindre ; B, B' les bases ; O, O' leurs

centres de gravité. Sur OO′ je prends de part et d'autre, et à égale distance du milieu G de cette droite, des segments égaux mn, $m'n'$ et je mène par les points m, n, m', n' des sections parallèles aux bases : ces sections déterminent deux petites lames cylindriques. Si on fait tendre vers 0 la longueur mn, les centres de gravité de ces lames ont pour limites m et m'; d'ailleurs leurs deux volumes sont égaux; donc le point d'application de la résultante de leurs poids a pour position limite le point G.



On peut ainsi décomposer le volume du cylindre en éléments tels que le centre de gravité de deux éléments correspondants a pour position limite le point G. Donc le centre de gravité total du cylindre est aussi au milieu G de OO′.

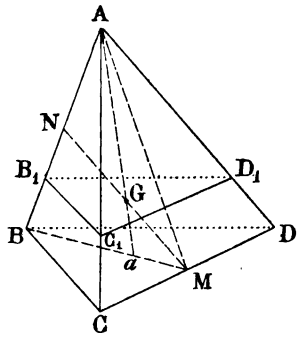
C. Q. F. D.

* Remarque. — La démonstration s'applique au prisme ; mais on peut dans ce cas éviter les considérations de limite. Pour cela, on considère d'abord un prisme triangulaire. Le plan parallèle aux bases, mené au milieu de leur distance, étant un plan diamétral pour des cordes parallèles aux arêtes latérales, contient le centre de gravité. Mais un plan passant par deux médianes correspondantes des deux bases est aussi un plan diamétral pour des cordes parallèles aux côtés où aboutissent ces médianes ; ce plan contient donc le centre de gravité : celui-ci est dès lors dans les trois plans médians et par suite sur leur droite d'intersection, laquelle joint les centres de gravité des deux bases. Ainsi, le centre de gravité du prisme triangulaire est à l'intersection de la droite qui joint les centres de gravité des bases avec le plan parallèle équidistant de ces deux bases.

73. **Tétraèdre. — Théorème.** — *Le centre de gravité d'un tétraèdre est à l'intersection des six plans déterminés par chaque arête et le milieu de l'arête opposée.*

Soit le tétraèdre ABCD. Le plan ABM mené par l'arête AB

et le milieu M de l'arête opposée CD est un plan diamétral pour des cordes parallèles à CD ; il contient le centre de gravité G du tétraèdre ; celui-ci étant également dans les plans menés par les cinq autres arêtes est à l'intersection des six plans de l'énoncé.



C. Q. F. D.

Remarques. — 1° Comme les deux plans menés respectivement par les arêtes opposées AB et CD passent par le point G, et les milieux N et M de ces côtés, ces trois points appartiennent à l'intersection des deux plans ; donc la droite MN passe par le point G. Ainsi, le point G étant sur les trois droites qui joignent les milieux des couples d'arêtes opposées, est à leur intersection.

2° Les deux plans menés respectivement par les arêtes AB et AD passent par le point A, par le point G et par le centre de gravité *a* de la face BCD. Ces trois points sont donc sur l'intersection des deux plans, et la droite A*a* passe par le point G. Ainsi, le point G étant sur les quatre droites qui joignent chaque sommet au centre de gravité de la face opposée est à l'intersection de ces quatre droites.

Corollaire. — Les six plans menés par chaque arête et le milieu de l'arête opposée, les trois droites joignant les milieux des couples d'arêtes opposées, les quatre droites joignant chaque sommet au centre de gravité de la face opposée concourent en un même point.

74. **Théorème.** — *Le centre de gravité d'un tétraèdre coïncide avec le centre des moyennes distances des quatre sommets.*

En effet, pour obtenir le centre des moyennes distances

des quatre points A, B, C, D, je compose d'abord les poids égaux appliqués en B, C, D. Leur résultante est appliquée en a; le centre des moyennes distances est donc sur Aa; il est donc à la fois sur les quatre droites joignant chaque sommet au centre de gravité de la face opposée; par suite il est à leur intersection et coïncide avec le point G.

C. Q. F. D.

75. Remarques. — Le poids appliqué en a est triple du poids appliqué en A; donc on a

$$\frac{Ga}{GA} = \frac{1}{3},$$

d'où

$$Ga = \frac{aA}{4};$$

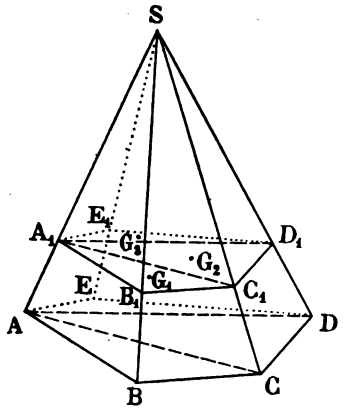
ainsi, le centre de gravité est au quart de aA à partir de a; il est donc dans le plan $B_1C_1D_1$ parallèle à celui de la face BCD mené au quart de la distance de cette face au sommet opposé A. Étant dans les quatre plans parallèles aux faces et menés respectivement au quart de la distance de chacune d'elles au sommet opposé, il est à l'intersection de ces quatre plans.

Enfin, on peut considérer le point G comme l'intersection de Aa avec le plan de la section $B_1C_1D_1$; on voit ainsi qu'il est le centre de gravité de cette section. Ce dernier résultat est généralisé dans le théorème suivant.

76. **Pyramide et cône. — Théorème.** — *Le centre de gravité d'une pyramide ou d'un cône est au centre de gravité de la section parallèle à la base faite au quart de la hauteur à partir de la base.*

Soit la pyramide SABCDE. Je mène la section $A_1B_1C_1D_1E_1$ parallèle au plan de la base, au quart de la hauteur à par-

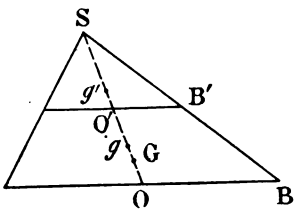
tir de cette base; puis je partage la pyramide par les plans SAC, SAD en trois tétraèdres dont les centres de gravité G_1, G_2, G_3 sont ceux des triangles $A_1B_1C_1$, $A_1C_1D_1$, $A_1D_1E_1$. D'ailleurs les pyramides ayant même hauteur, leurs poids sont proportionnels aux bases, et par suite aux sections correspondantes : ainsi en G_1, G_2, G_3 sont appliqués des poids proportionnels aux triangles de la section $A_1B_1C_1D_1E_1$. Le centre de gravité total est donc au centre de gravité de cette section.



C. Q. F. D.

On étend le théorème au cône par des considérations de limites. On trouverait le centre de gravité d'un polyèdre quelconque en le décomposant en pyramides.

* 77. **Tronc de pyramide et tronc de cône à bases parallèles.** — Soit le tronc de cône BB′ pris dans le cône SB, et soit O le centre de gravité de la base B; la droite SO perce le plan de la base B′ en son centre de gravité O′. Les centres de gravité des cônes SB et SB′ sont sur cette droite, en g et g', à des distances des points O et O′ égales à $\frac{SO}{4}$ et $\frac{SO'}{4}$. Soit G le centre de gravité du tronc de cône. Le cône SB étant composé du cône SB′ et du tronc de cône BB′, le poids appliqué en g est la résultante des poids appliqués en G et g'; donc les trois points G, g, g' sont en ligne droite, et l'on a par rapport à un plan quelconque



$$\text{mom}^t\, g = \text{mom}^t\, G + \text{mom}^t\, g',$$

d'où l'on déduit

$$(1) \qquad \text{mom}^t\, G = \text{mom}^t\, g - \text{mom}^t\, g'.$$

Nous nous proposons de trouver le rapport des distances du point G aux deux bases, et pour cela nous appliquerons deux fois l'équation (1) en prenant les moments par rapport à ces deux bases.

Notations. — Soient
B, B' les deux bases du tronc de cône,
h, h' les hauteurs des deux cônes,
x, y les distances du point G aux deux bases,
V le volume du tronc,
$a = \frac{h}{h'}$ le rapport des hauteurs.

Le rapport des bases sera

$$\frac{B}{B'} = a^2;$$

on peut prendre pour mesure des poids les triples des volumes ;

aux points	G,	g,	g',	correspondent
les poids	3V,	Bh,	B'h'	
et les bras de levier	x,	$\frac{h}{4}$,	$\frac{4h-3h'}{4}$,	pour la base B.
	y,	$\frac{3h-4h'}{4}$,	$\frac{-h'}{4}$,	pour la base B'.

On a donc

$$(2) \qquad 3Vx = Bh.\frac{h}{4} - B'h'.\frac{4h-3h'}{4},$$

$$(3) \qquad 3Vy = Bh.\frac{3h-4h'}{4} + B'h'.\frac{h'}{4},$$

et en divisant les égalités (2) et (3) membre à membre,

$$(4) \qquad \frac{x}{y} = \frac{Bh^2 - B'h'(4h-3h')}{Bh(3h-4h') + B'h'^2}.$$

La fraction du second membre ayant ses deux termes homogènes de même degré par rapport aux lettres B et B', on peut remplacer B et B' par des quantités proportionnelles, savoir : B par a^2 et B' par 1. La même équation ayant ses deux termes homogènes de même degré par rapport aux lettres h et h', on peut remplacer ces lettres par des quantités proportionnelles, savoir : h par a et h' par 1. Il vient ainsi

$$\frac{x}{y} = \frac{a^4 - 4a + 3}{3a^4 - 4a^3 + 1}.$$

Si l'on fait $a = 1$, le numérateur et le dénominateur du

second membre s'annulent; donc ces deux termes sont divisibles par $a-1$. Il vient, en supprimant ce diviseur,

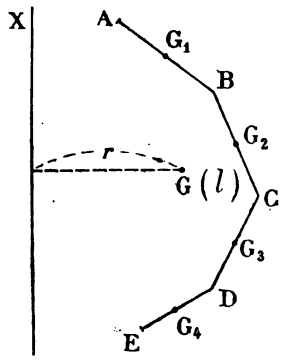
$$\frac{x}{y}=\frac{a^3+a^2+a-3}{3a^3-a^2-a-1}.$$

Pour $a=1$, les deux termes du second membre s'annulent; ils sont donc encore divisibles par $a-1$, et on a

$$\frac{x}{y}=\frac{a^2+2a+3}{3a^2+2a+1}.$$

* § VII. — Théorèmes de Guldin.

* 78. **Théorème I.** — *La surface engendrée par une ligne plane exécutant une révolution complète autour d'un axe situé dans son plan* et ne la traversant pas *égale la longueur de cette ligne multipliée par la circonférence que décrit son centre de gravité.*



Soient

ABCDE une ligne brisée tournant autour de l'axe X;

l, l_1, l_2, l_3, l_4 les longueurs de cette ligne et de ses côtés, longueurs qui peuvent être prises pour mesures des poids;

G, G_1, G_2, G_3, G_4 les centres de gravité de la ligne et de ses côtés;

r, r_1, r_2, r_3, r_4 leurs distances à l'axe X.

Si l'on prend les moments par rapport à un plan passant par X, ces dernières distances sont les bras de levier des poids l, l_1, l_2, l_3, l_4. On a donc pour équation des moments

$$(1)\qquad lr=l_1r_1+l_2r_2+l_3r_3+l_4r_4 \qquad \text{ou} \qquad \Sigma l_1r_1.$$

En multipliant par 2π les deux membres, il vient

$$(2)\qquad 2\pi r.l=\Sigma 2\pi r_1 l_1.$$

Or $2\pi r_1 l_1$ est l'expression de la surface du tronc de cône engendré par le côté AB; $\Sigma 2\pi r_1 l_1$ est donc la surface décrite par la ligne brisée, et l'équation (2) s'écrit, en désignant par s cette sur-

face et renversant l'ordre des membres,

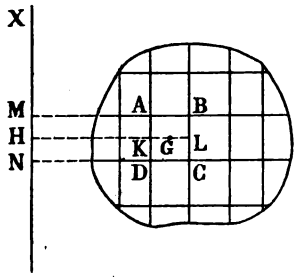
$$s = 2\pi r \times l.$$

Cette formule démontre le théorème.

Remarques. — 1° Le théorème s'étend aux lignes courbes par des considérations de limites.

2° Si au lieu de 360 degrés, la ligne ne décrit qu'un angle de ω degrés, la surface décrite est la fraction $\frac{\omega}{360}$ de la surface totale, c'est-à-dire $\frac{\omega}{360} \times 2\pi r.l$.

* 79. **Théorème II.** — *Le volume engendré par une aire plane exécutant une révolution complète autour d'un axe situé dans son plan* et ne la traversant pas *égale sa surface multipliée par la circonférence que décrit son centre de gravité.*



Examinons d'abord le cas d'un rectangle ABCD dont un des côtés est parallèle à X.

Par son centre de gravité G, je mène une perpendiculaire à X rencontrant X, AD, BC respectivement en H, K, L, et je prolonge AB, CD jusqu'à leurs rencontres en M, N avec X.

J'aurai successivement

$$\begin{aligned}
\text{Vol. ABCD} &= \text{cyl. MBCN} - \text{cyl. MADN} \\
&= \pi.\overline{HL}^2 \times MN - \pi.\overline{HK}^2 \times MN \\
&= \pi.MN(\overline{HL}^2 - \overline{HK}^2) \\
&= \pi.MN(HL - HK)(HL + HK) \\
&= \pi.MN \times LK \times 2GH \\
&= \text{surf. ABCD} \times 2\pi.GH,
\end{aligned}$$

ce qui démontre le théorème pour le cas considéré.

Soit maintenant une surface quelconque S dont le centre de gravité G est à une distance R de X; je trace un réseau de droites parallèles à X et de droites perpendiculaires ; je décompose ainsi la surface en rectangles tels que ABCD : il est vrai qu'il y aura des petites surfaces irrégulières sur les bords ; mais leur somme tend vers zéro en même temps que la longueur des divisions. Dès lors soit s la surface du rectangle ABCD, r la distance

de son centre de gravité à X ; on a, d'après le théorème des moments,

$$(1) \qquad S.R = \lim \Sigma sr.$$

En multipliant les deux membres par 2π, il vient

$$(2) \qquad S \times 2\pi R = \lim \Sigma(s \times 2\pi r).$$

Mais $s \times 2\pi r$ est le volume engendré par ABCD, d'après la première partie de la démonstration ; donc $\lim \Sigma(s \times 2\pi r)$ est la limite de la somme de ces volumes, c'est le volume V engendré par la surface totale ; on a donc

$$V = S \times 2\pi R. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

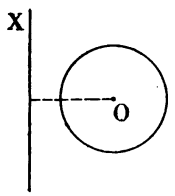
Remarque. — Si la rotation est de ω degrés, le volume engendré est $\frac{\omega}{360} S \times 2\pi R$.

* 80. **Applications des théorèmes de Guldin.** — Les théorèmes de Guldin ont pour formules :

$$s = l \times 2\pi r,$$
$$V = S \times 2\pi R.$$

Ces deux formules permettent de calculer s ou V, c'est-à-dire des surfaces ou des volumes de révolution quand on connaît l ou S, c'est-à-dire les longueurs ou les aires des lignes ou des surfaces planes, et r ou R, c'est-à-dire la position de leurs centres de gravité. Inversement, si on connaît s ou V, en même temps que l ou S, on peut en déduire r ou R, c'est-à-dire une coordonnée du centre de gravité. Nous allons donner un exemple de chacune de ces applications.

* 81. **Surface et volume du tore de révolution. — Définition.** — On appelle tore de révolution le volume engendré par un cercle tournant autour d'un axe situé dans son plan.



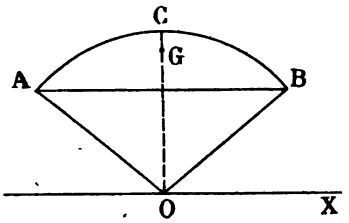
Soient :
O le centre du cercle,
d sa distance à l'axe X,
r le rayon,
S la surface du tore,
V son volume.

On aura (78 et 79)

$$S = \text{circ. } O \times 2\pi d = 4\pi^2 r d,$$
$$V = \text{cerc. } O \times 2\pi d = 2\pi^2 r^2 d.$$

Telles sont les expressions cherchées.

* 82. **Centre de gravité d'un arc de cercle.** — Soit à trouver le centre de gravité G de l'arc ACB de la circonférence O ; ce point G est sur le rayon moyen OC qui est un axe de symétrie.



Soient :

x la longueur cherchée OG,
a la longueur de l'arc,
c celle de la corde AB,
r le rayon.

Je fais tourner l'arc autour du diamètre OX parallèle à AB. J'aurai (78)

$$\text{surf. ACB} = a \times 2\pi . x,$$

ou en remplaçant surf. ACB par sa valeur connue, qui est celle d'une zone,

$$2\pi R . c = a \times 2\pi x ;$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{Rc}{a}.$$

* 83. **Centre de gravité du secteur circulaire.** — Soient :

OACB le secteur circulaire,
G son centre de gravité,
x la longueur OG.

Je garde d'ailleurs les notations précédentes et je fais tourner la figure autour de OX. J'aurai (79)

$$\text{vol. OACB} = \text{surf. OACB} \times 2\pi x.$$

En remplaçant vol. OACB et surf. OACB par leurs valeurs connues, il vient

$$2\pi Rc \times \frac{R}{3} = \frac{aR}{2} \times 2\pi x,$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{2}{3} \cdot \frac{Rc}{a}.$$

Ainsi, par l'application des théorèmes de Guldin, on retrouve (82, 83) les résultats obtenus par le théorème des moments (59, 65).

EXERCICES PROPOSÉS SUR LE CHAPITRE II

1. Le poids P d'une tige AB est appliqué en son milieu C. Sur une perpendiculaire à AB, au point C, se déplace un poids Q. A quelle distance du point C faut-il placer le poids Q pour que le centre des deux forces parallèles P et Q soit à une distance d du point C ?

Application : $P = 75^{gr}$, $Q = 15^{gr}$, $d = 5^{mm}$.

Cette question trouve son application dans le réglage de la sensibilité d'une balance (n° 123).

2. Trois forces parallèles données, P, Q, R, sont appliquées aux trois points A, B, C situés en ligne droite et tels que $AB = BC = l$. La troisième force R est de sens contraire aux deux autres. Déterminer le centre de ces trois forces parallèles.

Application : $P = 1{,}5$, $Q = 2$, $R = 3$.

3. Un tableau rectangulaire ABCD a pour côtés $AB = a$, $BC = b$; et pèse p^{kg} par mètre carré ; il repose contre un mur vertical, par son côté horizontal AB, sur deux clous E et F situés à des distances $AE = BF = c$ des bords verticaux. On suspend à ce tableau un poids Q, à une distance d du bord vertical AD. 1° Calculer la charge supportée par les points d'appui. 2° Calculer en fonction de la distance d le poids qu'il faut suspendre pour faire basculer le tableau autour du point d'appui E.

Application : $a = 1^{m},20$, $b = 0^{m},90$, $p = 10^{kg}$,
$AE = BF = 40^{c}$, $Q = 40^{kg}$.

4. Un triangle dont le poids P est appliqué au centre de gravité de sa surface repose par ses sommets sur un plan horizontal. Démontrer que la charge est également répartie sur les trois points d'appui.

5. Déterminer le point où il faut que soit appliqué le poids d'un trépied équilatéral pour que les charges des trois points d'appui soient entre elles comme les nombres 1, 2, 3.

6. Aux trois sommets d'un triangle sont appliquées trois forces parallèles entre elles, de même sens et proportionnelles aux côtés

opposés du triangle. Déterminer le centre de ces trois forces parallèles.

7. On considère deux forces parallèles de grandeurs données P et Q. Le point d'application A de la première est fixe; celui de la deuxième, B, décrit une droite donnée. Trouver le lieu géométrique du centre de ces deux forces parallèles.

8. Même problème, quand le point B décrit un cercle. Trouver un théorème général qui renferme, comme cas particuliers, les solutions des questions 7 et 8.

9. Trois forces égales, parallèles et de même sens, sont appliquées aux trois sommets d'un triangle. Le point d'application d'une quatrième force, double des précédentes, parallèle à ces forces, mais de sens contraire, décrit le cercle qui passe par les milieux des trois côtés du triangle. Trouver le centre de ces quatre forces parallèles.

10. Quatre forces égales, parallèles et de même sens, sont appliquées aux quatre sommets d'un tétraèdre. Le point d'application d'une cinquième force, égale aux précédentes, parallèle, mais de sens contraire, décrit la sphère circonscrite au tétraèdre. Trouver le lieu du centre de ces cinq forces parallèles.

Trouver un théorème qui renferme, comme cas particuliers, les solutions des questions 7, 8, 9 et 10.

Ces dix premières questions se rapportent aux forces parallèles en nombre limité. Voici maintenant des applications de la théorie des centres de gravité. Les questions 11 à 15 s'appliquent à des objets matériels qui sont entre les mains des élèves.

11. Un double décimètre a la forme d'un prisme droit de hauteur h ; la base est un trapèze isocèle. Les deux bases de ce trapèze sont distantes de d et ont pour longueurs respectivement a et b. Déterminer son centre de gravité.

Application : $h = 20^c$, $d = 4^{mm}$,
$a = 26^{mm}$, $b = 10^{mm}$.

12. Trouver le centre de gravité de la surface d'une boîte de carton rectangulaire et ouverte, connaissant les trois arêtes a, b, c de la boîte, et en négligeant l'épaisseur de ses cinq faces.

Application : $a = 12^c$, $b = 10^c$, $c = 9^c$.

13. Trouver le centre de gravité de la même boîte munie de son couvercle dont la hauteur est c' ; les deux autres dimensions sont encore a et b, parce qu'on néglige l'épaisseur du carton.

Application : $c' = 3^c$.

14. Un T à dessiner se compose de deux bras rectangulaires ABCD et EFGH. Le premier bras, ABCD (tête du T), a pour épaisseur e et le second e'. Leurs dimensions superficielles sont $AB = a$, $BC = b$, $EF = c$, $FG = d$. Sur l'axe du second bras et à la distance f de l'extrémité FG la plus éloignée de la tête ABCD, se trouve un trou circulaire de rayon r. Déterminer le centre de gravité de ce T.

Application : $e = 1^c,2$, $e' = 0^c,2$,

$a = 4^c,5$, $b = 25^c$, $c = 58^c$, $d = 5^c,5$, $r = 0^c,7$.

15. Une équerre de côtés a, b, est percée d'un trou circulaire de rayon r, concentrique au cercle inscrit dans le triangle de l'équerre. Déterminer le centre de gravité de cette équerre et sa position d'équilibre quand on la suspend à un clou par son ouverture circulaire.

Application : $a = 31^c$, $b = 12^c,7$, $r = 0^c,8$.

16. Deux tiges métalliques de même section ont pour longueurs h et h' et pour densités d et d'. On les soude bout à bout. Trouver la position du centre de gravité de la tige bimétallique ainsi obtenue.

Application : $h = 17^c$, $h' = 22^c$.

La première tige est en fer : $d = 7,79$.
La deuxième est en platine : $d' = 21,45$.

17. Deux sphères de rayons R et R' et de densités d et d' sont liées par une tige. L'axe de cette tige passe par les centres des deux sphères situées à la distance D et la section en est négligeable. Trouver la position du centre de gravité de ce corps.

Application : $R = 3^c$, $R' = 4^c,5$, $D = 50^c$.

La première sphère est en plomb : $d = 11,35$.
La deuxième sphère est en étain : $d' = 7,29$.

18. Sur les trois côtés d'un triangle rectangle, on construit trois carrés. Trouver le centre de gravité de l'aire formée par ces trois carrés et le triangle.

19. Dans un carré ABCD de centre O, on enlève le triangle AOB. Trouver le centre de gravité de l'aire restante.

20. Dans un carré ABCD, trouver un point M tel que, si on enlève le triangle AMB, le point M soit le centre de gravité de la partie restante.

21. D'un hexagone régulier ABCDEF on détache un triangle ABC formé par trois sommets consécutifs. Déterminer le centre de gravité de l'aire restante.

22. Un corps solide homogène de densité d a la forme d'un cube ABCDEFGH de centre O et de côté a. On en détache la pyramide OABCD. Trouver le poids et le centre de gravité du corps restant.

Application : $a = 35^c$, $d = 2{,}7$.

23. Trouver le centre de gravité de la surface d'un hémisphère.

24. Dans une sphère pleine de rayon R, est pratiquée une cavité sphérique de rayon r. La distance des centres est D. Trouver le centre de gravité du solide ainsi formé.

Application : $R = 25^c$, $r = 2^c$, $D = 3^c$.

25. Deux cônes ont même base circulaire de rayon R ; leurs sommets sont situés sur l'axe à des distances du centre du cercle de base égales à h et h'. Trouver le centre de gravité du volume limité par les deux surfaces coniques.

Application : $R = 3^c$, $h = 15^c$. $h' = 25^c$.

26. Appliquer les théorèmes de Guldin à la recherche de la surface et du volume du cône droit à base circulaire.

27. Même question pour le tronc de cône.

28. Un jeu de cartes est placé sur une table. On avance la carte du dessus dans le sens de sa longueur, aussi loin qu'elle peut se tenir horizontale. Sans déranger la position de cette première carte sur la seconde, on avance celle-ci aussi loin que l'ensemble des deux cartes du dessus peut se tenir horizontal, et ainsi de suite jusqu'à la carte du dessous, qui demeure immo-

bile. Déterminer les distances dont les cartes successives avancent l'une sur l'autre (Jullien).

29. n points également distants sont disposés en ligne droite. En chacun d'eux est un poids qui a pour mesure son numéro d'ordre augmenté du poids précédent. Trouver le centre de gravité et le poids total du système.

30. Dans un cône de révolution, dont l'ouverture est 2α, on inscrit n sphères tangentes entre elles. Le rayon de la sphère la plus rapprochée du sommet est r. Trouver le centre de gravité du système.

31. Même question lorsque, la plus grande sphère étant donnée de rayon R, on inscrit des sphères indéfiniment entre la plus grande et le sommet.

Les questions suivantes complètent la théorie.

32. Trouver le centre de gravité de la surface latérale : 1° d'une pyramide ; 2° d'un cône.

33. Trouver le centre de gravité de la surface latérale d'un tronc de pyramide ou d'un tronc de cône.

34. Centre de gravité de la surface totale : 1° d'une pyramide ou d'un cône ; 2° d'un tronc de pyramide ou d'un tronc de cône.

35. Un polygone est circonscrit à un cercle. On le décompose en triangles ayant pour bases les côtés du polygone et pour sommet commun le centre O du cercle. Aux trois sommets de chacun de ces triangles, on applique des poids qui ont pour mesure l'aire de ce triangle. Déterminer : 1° le centre de gravité des poids qui sont aux sommets du polygone ; 2° le centre de gravité de ces poids réunis à ceux qui sont appliqués au point O.

36. Conclure des résultats de la question 35 ce théorème : Les centres de gravité de l'aire et du contour d'un polygone circonscrit à un cercle sont sur un même rayon du cercle ; leurs distances au centre sont entre elles comme 2 et 3 (Brassine).

37. Adapter le théorème de la question 36 au cas d'un polygone gauche circonscrit à une sphère.

38. Adapter les questions 35 et 36 au cas d'un polyèdre circonscrit à une sphère.

Les questions suivantes ont un caractère plus marqué de théorie générale.

39. Si l'on joint un point O quelconque aux points d'application $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des forces parallèles d'intensités $p_1, p_2, \ldots, p_n$, et au centre G de ces forces parallèles, on a entre les carrés de ces longueurs la relation

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_i \overline{OA}^2 = \overline{OG}^2 \Sigma p_i + \Sigma p_i \overline{GA_i}^2.$$

40. La somme des carrés des distances mutuelles de n points égale n fois la somme des carrés des distances de ces n points à leur centre des moyennes distances.

41. Démontrer que les relations des questions 39 et 40 subsistent quand on remplace les segments qui y figurent par leurs projections sur une même droite quelconque.

42. Appliquer la méthode du n° 38, relative à la réduction des forces parallèles, à la discussion du cas où la somme algébrique de toutes les forces est nulle.

43. Appliquer la même méthode en choisissant pour le point désigné par A dans le n° 38 le point C de la question 26 proposée sur le chap. I. Voir ce que devient alors cette méthode dans le cas de deux forces.

Les exercices suivants forment le canevas d'une théorie directe des couples. Un couple n'est pas en équilibre d'après le principe expérimental (n° 19). On démontrera les théorèmes suivants.

44. Un couple ne peut pas être remplacé par une force unique.

On raisonnera comme au n° 25, en faisant tourner le système autour d'un axe perpendiculaire au plan des forces du couple et mené par le centre du parallélogramme construit sur ces deux forces. Puis on remarquera que la position de ce centre n'est pas entièrement déterminée, puisque les deux forces du couple peuvent être transportées le long de leurs directions.

45. Si l'on fait tourner un couple, dans son plan, autour du centre du parallélogramme construit sur ses deux forces, on obtient un second couple équivalent au premier.

46. Si l'on transporte un couple parallèlement à lui-même, on obtient un nouveau couple équivalent au premier.

47. Si, dans le plan d'un couple, on change l'intensité des deux forces du couple et leur écartement de façon que l'aire du parallélogramme construit sur les deux forces ne change pas, on obtient un nouveau couple équivalent au premier.

48. Étant donné deux couples quelconques, on peut, en appliquant les théorèmes des questions 45, 46, 47, faire en sorte que les deux forces du second couple aient les mêmes points d'application que les deux forces du premier couple. En déduire une méthode pour la composition de plusieurs couples en un seul.

Voici enfin, sur les centres de gravité, une série d'exercices qui m'ont été communiqués par mon confrère et ami M. Laisant. On y reconnaîtra son imagination féconde et originale. Avec l'auteur j'emploierai le mot « *barycentre* », pour remplacer la locution « centre de gravité ».

49. Le centre du cercle circonscrit à un triangle est le barycentre des quatre centres des cercles inscrit et exinscrits.

50. On donne un polygone fermé ABCDE; on fait subir à chaque côté une translation correspondante. Les côtés viennent en $A_1B'_1$, $B_1C'_1$, $C_1D'_1$, $D_1E'_1$, $E_1A'_1$. Démontrer que le barycentre des points A_1, B_1, C_1, D_1 coïncide avec celui des points A'_1, B'_1, C'_1, D'_1, E'_1.

51. On donne un triangle ABC et un point O; par les trois sommets d'un second triangle LMN, on mène des droites LL', MM', NN' parallèles, égales respectivement à AO, BO, CO et de mêmes sens. Démontrer que le point O et les barycentres des trois triangles ABC, LMN, L'M'N' sont les quatre sommets d'un parallélogramme.

Les propositions 50 et 51 peuvent être regardées comme des cas particuliers de la suivante :

52. On considère deux systèmes de points correspondants A, B, C, ... et A', B', C', ... dont les barycentres sont G et G'. On mène arbitrairement des droites LL', MM', NN', ... égales, parallèles respectivement à AA', BB', CC', ... et de mêmes sens Démontrer que les barycentres H et H' des systèmes de points

L, M, N, ... et L', M', N', ... forment avec G et G' les quatre sommets d'un parallélogramme.

53. On donne un triangle ABC dont le barycentre est G, et un point O dans son plan. Sur les droites AO, BO, CO comme bases on construit trois triangles directement semblables entre eux, AOA', BOB', COC'. Démontrer que le barycentre G' du triangle A'B'C' s'obtient en construisant sur GO un triangle directement semblable aux trois premiers.

54. Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ un système de n points, G son barycentre. A chaque point A_p de ce système, on fait correspondre le barycentre de tous les autres G_p. Démontrer que la figure des G_p est homothétique inverse à la figure des A_p. Le centre de similitude est G et le rapport de similitude est $\frac{1}{n-1}$.

Ces questions sont extraites du traité des équipollences de M. Bellavitis, traduction de M. Laisant Voici d'autres exercices puisés dans le traité dont M. Laisant est lui-même l'auteur.

55. Aux sommets A, B, C d'un triangle, on applique les poids 1, 2, 3, puis 2, 3, 1, puis 3, 1, 2. Soient G_1, G_2, G_3 les trois barycentres. Démontrer : 1° que les triangles ABC et $G_1G_2G_3$ ont le même barycentre G ; 2° que les médianes de chacun de ces deux triangles sont parallèles aux côtés de l'autre.

56. Le barycentre de deux poids α et β placés en A et B est G. Si l'on change le signe de l'un de ces poids, le nouveau barycentre est conjugué harmonique de G par rapport au segment AB.

57. Le barycentre des poids α, β, γ placés en A, B, C est G. On change les signes isolément de chacun de ces poids. On obtient, pour les poids $(-\alpha, \beta, \gamma)$, $(\alpha, -\beta, \gamma)$, $(\alpha, \beta, -\gamma)$ les trois barycentres A_1, B_1, C_1. Démontrer que AA_1, BB_1, CC_1 se rencontrent en G.

Les questions suivantes ne sont extraites d'aucun ouvrage :

58. Trouver les barycentres des lettres A, V, M, T, E. Tous les traits sont supposés égaux et de poids 1, sauf les traits qui sont à mi-hauteur des lettres A et E, lesquels traits sont supposés de longueur et de poids $\frac{1}{2}$.

59. Barycentre du périmètre d'un triangle dont les côtés ont des densités inversement proportionnelles à leurs longueurs.

60. Barycentre de la table de multiplication, chaque case ayant un poids mesuré par le nombre qui s'y trouve.

61. Barycentre de la table d'addition.

62. Barycentre du triangle arithmétique de Pascal.

63. Barycentre d'un cadran d'horloge.

64. Plus généralement, barycentre d'un cercle partagé en $2n$ segments d'égale longueur mais dont les poids sont en progression arithmétique. Voir ce que devient la solution quand on fait tendre vers zéro les segments de la circonférence en même temps que leur nombre croît indéfiniment.

65. Barycentres d'une ligne composée de poids équidistants mesurés : 1° par leurs numéros d'ordre ; 2° et 3° par les carrés ou les cubes de ces numéros d'ordre ; 4° par les termes d'une progression géométrique.

66. Barycentre d'une pile de boulets triangulaire.

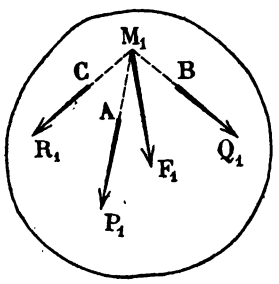
CHAPITRE III

COMPOSITION DES FORCES APPLIQUÉES A UN CORPS SOLIDE THÉORIE DES COUPLES

§I1. — Réduction a deux des forces appliquées a un corps solide. — Conditions générales d'équilibre et d'équivalence des systèmes de forces.

84. **Théorème.** — *Les forces appliquées à un corps solide se réduisent à deux forces, dont l'une est appliquée en un point arbitraire du corps.*

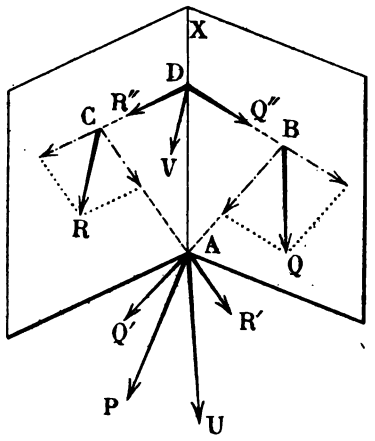
Soient M_1F_1, M_2F_2, ... les forces appliquées au corps solide ; je prends trois points A, B, C arbitraires dans ce corps. Je décompose la force M_1F_1 en trois autres suivant les trois directions M_1A, M_1B, M_1C ; et je transporte les points d'application de ces forces respectivement aux points A, B, C de leurs directions. J'obtiens ainsi les trois forces AP_1, BQ_1, CR_1. J'opère de même pour chacune des forces M_2F_2, ...



J'ai ainsi, appliqués aux points A, B, C, trois systèmes de forces. Je remplace ces systèmes de forces concourantes respectivement par leurs résultantes P, Q, R.

Cela posé, je considère les deux plans déterminés par le point A et les deux forces Q et R.

Ces deux plans, ayant le point A commun, ont une droite commune AX passant par ce point. Je prends sur cette droite un point arbitraire D. Je trace les droites AB, AC, DB, DC. Je décompose la force Q suivant les deux directions BA, BD en deux autres forces que je transporte en AQ′, DQ″ respectivement aux points A et D de leurs directions. De même, je remplace la force R par deux forces AR′, DR″. Il reste alors deux systèmes de forces appliquées en A et D que je remplace respectivement par leurs résultantes AU, DV.



Corollaire. — *Pour que les forces se fassent équilibre,* il faut et il suffit *que les forces* U *et* V *soient nulles ou bien égales et directement opposées* (19).

85. **Remarques.** — 1° Le point A est arbitraire. Ce point étant choisi, la droite X variera avec le choix des points B et C, mais sera toujours assujettie à passer par le point A; le point D est arbitraire sur cette droite. Ce point fixé, les forces U et V sont déterminées. On voit qu'il y a une infinité de manières de réduire à deux les forces appliquées à un corps solide.

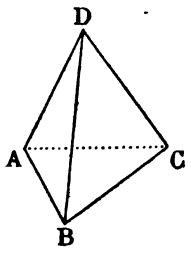
2° Si la force M_1F_1 est hors du plan ABC, la décomposition de cette force en trois autres se fait par la règle du parallélépipède. Si M_1F_1 est dans le plan ABC, la décomposition est indéterminée et peut se faire d'une infinité de manières.

3° La première partie de la démonstration prouve que les forces appliquées à un corps solide se réduisent à trois forces AP, BQ, CR appliquées en trois points arbitraires A, B, C.

4° La méthode du n° 84 repose sur deux transformations seulement : La première consiste à transporter le point d'application d'une force d'un point à un autre de sa direction ; la deuxième consiste à remplacer plusieurs forces concourantes par leur résultante ou inversement.

5° Nous allons chercher une expression numérique des conditions d'équilibre et d'équivalence des systèmes de forces. Ces conditions sont exprimées par les théorèmes des n°s 90 et 91. Pour les établir, il convient d'introduire la notion du signe d'un tétraèdre. Cette notion, qui est la base du *calcul barycentrique* de Mœbius [1], est analogue à celle du signe d'un segment, dont on a vu de nombreuses applications dans tout le cours de mathématiques élémentaires.

86. **Définitions : Signe d'un tétraèdre. Moment d'une force par rapport à un axe.** — De même que le *sens d'un segment* est déterminé par l'ordre dans lequel on énonce les lettres qui désignent ses extrémités, de même le *sens d'un tétraèdre* est déterminé par l'ordre dans lequel on énonce ses quatre sommets. Pour définir le sens d'un tétraèdre ABCD, je le déplace sans le déformer, de façon à rendre horizontal le triangle ABC formé par les trois premiers points. Enfin j'imagine un mobile parcourant le contour de ce triangle dans le sens ABC, puis un observateur placé debout, à l'intérieur de



(1) *Der barycentrische Calcul.* Leiptzig, 1827.

ce triangle. *Si l'observateur voit le mobile tourner de droite à gauche*, en même temps que *le quatrième sommet* D *est en dessus*, je dis que le tétraèdre a le sens *direct* ou *dextrorsum*. On peut toujours satisfaire à l'une des deux conditions de cette définition, en retournant s'il y a lieu le tétraèdre, sens dessus dessous. Si la deuxième condition n'est pas réalisée en même temps, je dis que le tétraèdre a le sens *rétrograde* ou *sinistrorsum*. Ainsi le sens direct se reconnaîtra, soit à ce que le point D est en dessus et que le mobile tourne de droite à gauche, soit à ce que le point D est en dessous et que le mobile tourne de gauche à droite. Le sens rétrograde du tétraèdre se reconnaîtra, soit à ce que le point D est en dessus et que le mobile tourne de gauche à droite, soit à ce que le point D est en dessous et que le mobile tourne de droite à gauche.

Je désignerai par vol. ABCD la mesure de ce tétraèdre et par ABCD seulement, en supprimant « vol. », ce volume précédé du signe + si le tétraèdre a le sens direct, et du signe — si le tétraèdre a le sens rétrograde. Ce nombre accompagné de son signe est la *valeur algébrique du tétraèdre* ABCD. Dans le cas de la figure, on a

$$\text{ABCD} = +\text{vol. ABCD},$$

parce que le point D est en dessus et qu'un mobile qui tournerait dans le sens ABC, irait de la droite à la gauche de l'observateur défini plus haut, en passant devant lui. On a, au contraire,

$$\text{BACD} = -\text{vol. BACD},$$

parce que, pour le même observateur, un mobile qui tournerait dans le sens BAC irait de la gauche à la droite de l'observateur. Le lecteur vérifiera facilement que l'expression ABCD change de signe quand on échange deux lettres consécutives quelconques, A avec B, B avec C, ou C avec D. On peut alors ranger les lettres dans tel ordre que l'on veut par une suite d'échanges entre lettres consécutives,

chaque échange étant accompagné d'un changement de signe.

J'appelle *moment d'une force* AB *par rapport à un segment* CD, le produit par le nombre 6 de la valeur algébrique du tétraèdre ABCD. Quand le segment CD est égal à l'unité, ce produit porte le nom de *moment de la force* AB *par rapport à la droite indéfinie* CD. De ces définitions résultent les propriétés suivantes :

1° Le moment d'une force AB par rapport à un segment CD ne change pas quand on transporte la force le long de sa propre direction, ni quand on transporte le segment AB le long de sa direction. En effet, dans le premier cas, par exemple, le tétraèdre conserve la même hauteur issue du point D ; quant au triangle de base ABC, il conserve la même surface, car sa hauteur issue de C ne change pas, et sa base AB conserve la même longueur.

2° Si on change le sens du segment ou de la force, le tétraèdre est changé de signe.

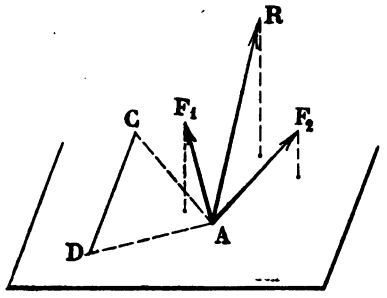
3° L'unité de force et celle de longueur restent toujours arbitraires dans nos formules ; les nombres qui y figurent ne sont donc déterminés qu'à un facteur constant près, qui dépend du choix de ces unités. Il en résulte que la notion de moment et celle de tétraèdre, lesquelles ne diffèrent que par le facteur 6, ne sont pas essentiellement distinctes. Il n'y aura pas d'inconvénient à les confondre.

87. **Théorème.** — *Le moment de la résultante de plusieurs forces concourantes, par rapport à un segment quelconque, est égal à la somme des moments de ces forces par rapport au même axe.*

Soit CD le segment arbitraire par rapport auquel on prend les moments ; F_1, F_2, ..., R les extrémités des forces appliquées au point A et de leur résultante. Je vais démontrer que l'on a

$$CDAF_1 + CDAF_2 + \ldots = CDAR.$$

1° Les tétraèdres qui figurent dans cette formule ont même base CDA. Ils sont donc proportionnels à leurs hauteurs. Il y a plus. Ces hauteurs peuvent servir de mesures aux tétraèdres, non seulement en valeur absolue, mais aussi en signe, pourvu qu'on convienne de compter ces hauteurs positivement au-dessus du plan CDA et négativement au-dessous. Cela résulte de la définition du signe d'un tétraèdre (86).



2° D'autre part, la hauteur ainsi définie de CDAR, par exemple, est la valeur algébrique de la projection de AR sur la perpendiculaire au plan de la base CDA. Or on sait que la projection de la résultante AR égale la somme algébrique des projections des composantes AF_1, AF_2, ... (37).

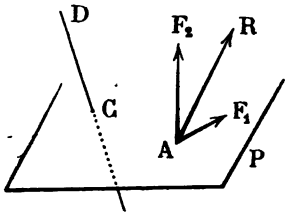
De ces deux parties de la démonstration résulte que l'on a bien

$$CDAF_1 + CDAF_2 + \ldots = CDAR.$$

C. Q. F. D.

88. **Théorème de Varignon.** — Examinons le cas particulier où les forces concourantes sont situées dans un même plan P et choisissons le point C dans ce plan. Enfin écrivons ARCD, par exemple, au lieu de CDAR, ce qui revient au même (86). Les tétraèdres ont tous même hauteur issue du sommet D que je suppose au-dessus du plan P, pour fixer les idées. Ils sont alors mesurés par leurs bases. Remarquons que, d'après nos conventions, il conviendra d'affecter ARC du signe + quand l'observateur de la définition

(86) verra le triangle ARC dextrorsum. C'est le cas de la figure ci-contre. Quand le triangle est sinistrorsum, il doit être affecté du signe — . Le double de ce triangle, avec son signe, est ce qu'on appelle le *moment* de la force AR par rapport au point C. On peut donc énoncer ce théorème :



Si des forces concourantes sont dans un même plan, le moment de leur résultante, par rapport à n'importe quel point du plan, est égal à la somme algébrique des moments de ces forces par rapport au même point.

Ce théorème, dû à Varignon, n'est, comme on voit, qu'un cas particulier du précédent (87).

89. **Théorème.** — *La somme algébrique des moments des forces appliquées à un corps solide par rapport à un segment quelconque, est égale à la somme algébrique des moments des forces* U *et* V *auxquelles on peut réduire les premières.*

En effet, pour réduire les forces données à deux forces U et V (84), on n'a employé que deux modes de transformation (85, 4°) :

1° Une force est transportée d'un point à un autre de sa direction. Cela ne change pas son moment (86) ; donc cela ne change pas non plus la somme algébrique des moments des forces appliquées au corps solide.

2° Plusieurs forces sont remplacées par leur résultante ou inversement. La somme algébrique des moments des forces remplacées est égale au moment de la résultante. Donc cette opération ne change pas non plus la somme algébrique des moments des forces appliquées au corps solide.

En résumé, la somme des moments des forces données

n'est pas changée quand on les remplace par les forces U et V. C. Q. F. D.

90. **Théorème.** — *Pour qu'un système de forces appliquées à un corps solide soit en équilibre, il faut et il suffit que la somme algébrique de ces forces, par rapport à tout segment de l'espace, soit nulle.*

Je réduis les forces données à deux forces AU et BV (84).

I. *La condition est nécessaire.* — L'hypothèse est que le système des forces données est en équilibre. Donc les deux forces U et V sont, ou bien nulles, ou bien égales et directement opposées (84). La somme algébrique de leurs moments est alors nulle par rapport à tout segment de l'espace (86). Or cette somme est égale à celle des moments des forces données. Ainsi donc, *si le système des forces données est en équilibre, la somme algébrique des moments de ces forces par rapport à tout segment de l'espace est nulle.*

II. *La condition est suffisante.* — L'hypothèse est maintenant que la somme algébrique des moments des forces, par rapport à tout segment de l'espace, est nulle. Celles des forces AU et BV qui est égale à la première somme est aussi nulle :

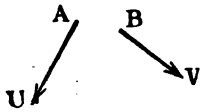
$$(1) \qquad \text{mom}^t\, AU + \text{mom}^t\, BV = 0.$$

Si l'une des forces, AU par exemple, est nulle, mom^t AU est nul et la formule (1) donne mom^{t}BV $= 0$, et cela par rapport à tout segment de l'espace. Donc BV est aussi nulle. Les forces AU et BV étant nulles, le système des forces données est en équilibre.

Je suppose maintenant que les forces AU et BV ne sont pas nulles. Je vais montrer qu'elles sont, 1° dans un même plan, 2° appliquées suivant la même droite, 3° égales et de sens contraire. J'utiliserai, pour cela, le choix que je peux faire du segment arbitraire CD.

1° Je prends les moments par rapport au segment AU

qui représente la première force elle-même. Alors mom^t AU est nul et l'égalité (1) donne mom^t BV = 0, c'est-à-dire AUBV = 0 ; AU et BV sont donc dans un même plan P.

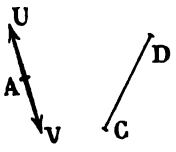


2° Je prends les moments par rapport à une droite AC menée par le point A de la première force, et en dehors du plan P. Alors mom^t AU est encore nul et l'équation (1) donne mom^t BV = 0. La force BV doit donc rencontrer le segment AC. Cette rencontre ne peut avoir lieu qu'au point A où la droite AC perce le plan P qui contient BV. Or le point A a pu être choisi n'importe où sur la droite AU. Ainsi BV passe par tous les points de AU ; ces deux forces sont donc sur une même ligne droite.

3° Je peux dès lors supposer que les deux forces sont appliquées au même point A. Je prends les moments par rapport à un segment CD quelconque. J'aurai, par hypothèse,

$$CDAU + CDAV = 0.$$

Ainsi ces deux tétraèdres sont égaux et de signe contraire. Or ils ont même base CDA ; pour qu'ils aient des signes contraires, il faut que AU et AV soient de sens contraire ; pour qu'ils aient même volume, il faut que les hauteurs soient égales, ce qui exige que les forces AU et AV soient elles-mêmes égales.



En résumé, si la somme des moments des forces données est nulle, les forces AU et BV auxquelles on peut les réduire sont ou bien nulles, ou bien égales et directement opposées. Dans les deux cas, le système des forces données est en équilibre. C. Q. F. D.

91. Théorème. — *Pour que deux systèmes de forces,*

appliquées à un corps solide, soient équivalents, il faut et il suffit que, par rapport à tout segment de l'espace, la somme algébrique des moments des forces du premier système soit égale à celle des forces du second système.

Soient A et B les deux systèmes de forces, B′ un système faisant équilibre à B ; a, b, b' les sommes des moments des systèmes A, B, B′ par rapport à un segment arbitraire. Le système (B, B′) étant en équilibre, d'après la définition de B′, on a (90)

$$(1) \qquad b + b' = 0.$$

Cela posé, je vais démontrer les deux parties du théorème.

1° *La condition de l'énoncé est nécessaire.* — L'hypothèse est que les systèmes A et B sont équivalents. Alors, comme le système (B, B′) est en équilibre, le système (A, B′) est aussi en équilibre ; on a donc (90)

$$(2) \qquad a + b' = 0,$$

et, en retranchant membre à membre cette égalité (2) de (1),

$$a - b = 0, \qquad \text{ou} \qquad a = b.$$

La somme algébrique des moments du premier système de forces est égale à celle du second système.

2° *La condition est suffisante.* — L'hypothèse est maintenant

$$a = b.$$

Si, dans l'égalité (1), on remplace b par le nombre a qui lui est égal par hypothèse, il vient

$$a + b' = 0.$$

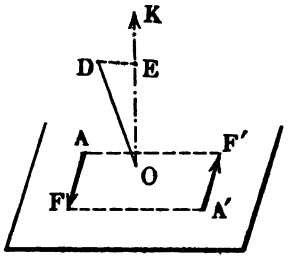
Donc le système (A, B′) est en équilibre (90). Mais alors, les systèmes A et B sont équilibrés par un même système B′, autrement dit ils sont équivalents (18). C. Q. F. D.

Remarque. — D'après cela l'effet mécanique d'un système de forces est déterminé quand on sait trouver la

somme algébrique des moments de ces forces par rapport à tout segment de l'espace. Pour cette raison, nous dirons plus brièvement « *le moment d'un système de forces* », au lieu de « *la somme algébrique des moments des forces du système* ».

§ II. — Théorie des couples.

92. Définitions. — On appelle *couple* (Cf. n° 42) l'ensemble de deux forces parallèles, égales et de sens contraire, AF, A'F'. Leur plan est le *plan du couple*; la valeur commune des deux forces est la *force du couple*; leur distance en est le *bras de levier*. Nous verrons (94) que l'effet mécanique du couple est bien représenté par un segment de droite OK qu'on appelle *axe du couple*. Ce segment est défini en grandeur, direction et sens, mais peut être transporté parallèlement à lui-même dans tout l'espace [1]. Il est perpendiculaire au plan du couple. Pour définir le sens OK, je suppose le point O à l'intérieur du parallélogramme AFA'F', puis j'imagine un mobile parcourant, dans le sens AFA'F', c'est-à-dire dans le sens des forces elles-mêmes, le contour de ce parallélogramme. Le sens OK est tel qu'un observateur placé les pieds au point O et la tête vers le point K voie le mobile



(1) Ces conditions sont celles qui définissent en général ce qu'on appelle un *vecteur*. La considération des vecteurs joue un rôle très important en géométrie, en mécanique et en physique mathématique, particulièrement dans la théorie de l'électricité. Il serait peut-être plus naturel de dire le *vecteur d'un couple* que l'*axe d'un couple*, mais ce n'est pas l'usage.

tourner de droite à gauche. Enfin la mesure de OK est égale au produit de la force par le bras de levier. C'est, si l'on veut, l'aire du parallélogramme AFA'F'. Elle est égale à la somme des triangles AFO, A'F'O. Si l'on considérait un point O', toujours dans le plan du couple, mais extérieur à la région du plan limitée par les deux droites indéfinies AF et A'F', l'aire du parallélogramme AFA'F' serait égale à la différence des deux triangles AFO', A'F'O'. Mais dans tous les cas on peut dire qu'elle est égale à la *somme algébrique* de ces deux triangles, comptés positivement, s'ils sont dextrorsum par rapport à l'observateur OK et négativement dans le cas contraire.

93. **Théorème.** — *Le moment d'un couple par rapport à un segment quelconque égale la valeur algébrique du produit de l'axe du couple par la projection du segment sur cet axe.*

Soit (fig. du n° 92) AF, A'F' le couple; OD le segment par rapport auquel on prend les moments et que je peux toujours transporter le long de sa direction jusqu'à l'intersection O avec le plan. Soit enfin OK l'axe du couple. Je projette le point D en E sur OK. Je dis que l'on a

$$(1) \qquad 6\,AFOD + 6\,A'F'OD = OK.OE.$$

En effet, les deux tétraèdres du premier membre ont pour hauteur OE, et l'on a

$$\begin{aligned} 6AFOD &= 2AFO\ OE \\ 6A'F'OD &= 2A'F'O.OE \\ \hline 6(AFOD + A'F'OD) &= 2(AFO + A'F'O').OE \\ &= AFA'F'.OE \\ &= OK.OE. \end{aligned}$$

L'égalité (1) est donc démontrée dans le cas de figure où tous les termes de l'énoncé sont positifs.

On voit facilement qu'elle subsiste entre les valeurs algébriques de ses termes : 1° quand le point O est à l'extérieur de la région du plan du couple comprise entre les droites AF et A'F'; 2° quand OE et OK sont de sens contraire.

Remarques. — 1° On sait (91) que l'effet d'un système de forces est connu quand on peut déterminer le moment du système par rapport à tout segment de l'espace. S'il s'agit d'un couple, le dernier théorème permet de déterminer ce moment dès qu'on connaît l'axe du couple. La connaissance de cet axe suffit donc à déterminer l'effet du couple, comme on l'avait annoncé (92). De là résulte toute la théorie des transformations des couples, renfermée dans les théorèmes des n°s 94 et 95.

2° Le moment du couple OK par rapport au segment OD peut être représenté par l'une des trois expressions égales :

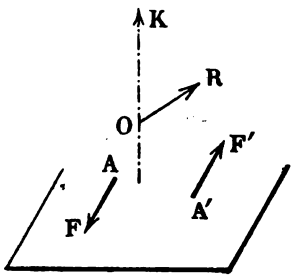
$$OK \times \text{proj. } OD = OK . OD \cos(\widehat{OK, OD}) = OD \times \text{proj. } OK.$$

94. Théorèmes. — 1° *Un couple n'est pas en équilibre.*

Car ses deux forces ne sont pas directement opposées.

2° *Il ne peut pas être remplacé par une force unique.*

Prenons en effet les moments par rapport à OK, parallèle à l'axe du couple menée par un point O de la force unique R. Le moment de R est nul, tandis que celui du couple ne l'est pas (93). La force et le couple ne sont donc pas équivalents (91).

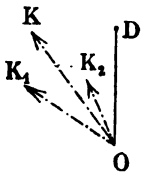


3° *Deux couples qui ont même axe sont équivalents.*

En effet, ils ont même moment par rapport à tout segment de l'espace (93); dès lors ils sont équivalents (91). De

là résulte que l'*on peut, sans en changer l'effet, déplacer un couple dans son plan, transporter ce plan parallèlement à lui-même, et altérer dans ce plan la force et le bras de levier de façon que leur produit ne change pas, non plus que le sens du couple.*

95. **Théorème.** — *On peut remplacer l'ensemble de plusieurs couples* K_1, K_2, ... *par un couple unique dont l'axe* K *s'obtient en prenant la résultante des axes* K_1, K_2, ..., *comme si ces axes représentaient des forces appliquées en un même point, par la règle du polygone des forces* (32).



En effet, si l'on prend les moments par rapport à un segment quelconque OD, on a

$$\text{mom}^t \text{ de } K_1 = OD.\ \text{proj. } K_1. \qquad (93)$$

$$\text{mom}^t \text{ de } K_2 = OD.\ \text{proj. } K_2,$$

. . . . . .

$$\text{mom}^t \text{ de } (K_1, K_2, \ldots..) = OD.(\text{proj. } K_1 + \text{proj. } K_2 + \cdots\cdots)$$

$$= OD.\ \text{proj. } K \qquad (37)$$

$$= \text{mom}^t \text{ de } K. \qquad (93).$$

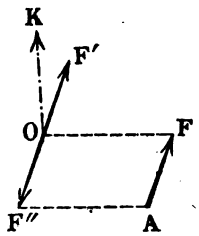
Le moment de l'ensemble des couples K_1, K_2, ... étant égal à celui du couple K, ces deux systèmes sont équivalents. C. Q. F. D.

Remarque. — On dira plus brièvement : *Les couples se composent par leurs axes ;* et aussi : *les couples* K_1, K_2, ... *ont pour couple résultant* K.

§ III. — Application de la théorie des couples a la réduction des forces appliquées a un corps solide.

96. **Théorème.** — *On peut transporter une force appliquée à un corps solide, parallèlement à elle-même, d'un point d'application à un autre arbitraire, en y adjoignant un couple.*

Soit la force AF et le point O arbitraire. Je peux appliquer au point O deux forces contraires OF′, OF″, égales et parallèles à AF. La force AF est alors remplacée par le système (OF′, OF″, AF) composé, si l'on veut, de la force OF′, qui n'est autre que AF transportée en O, et du couple (AF, OF″).



C. Q. F. D.

Remarque. — L'axe OK de ce couple est perpendiculaire au plan AFO, dans un sens tel que le tétraèdre AFOK soit dextrorsum ; il a pour mesure 2 tr. AFO.

97. **Théorème.** — *Les forces appliquées à un corps solide se réduisent à une force constante en grandeur, direction et sens, appliquée en un point arbitraire, et à un couple variable avec ce point.*

Soient, en effet, F_1, F_2, ... les forces. Je prends un point O arbitraire, et j'y transporte les forces parallèlement à elles-mêmes en F'_1, F'_2, ... en y adjoignant des couples ayant pour axes K_1, K_2, ... définis par la remarque précédente (96). Les forces F'_1, F'_2, ... appliquées en O ont une résultante R, et comme ces forces sont constantes en grandeur, direction et sens, il en est de même de R ; de plus les couples K_1, K_2, ... admettent un couple résultant dont l'axe K est la résultante de K_1, K_2, ... C. Q. F. D.

DÉFINITIONS. — La force constante R s'appelle *résultante de translation* ; le couple K variable en grandeur et direction avec le point O s'appelle *couple de translation*.

Les théorèmes suivants constituent une véritable discussion de ce mode de réduction.

98. **Théorème.** — *Pour qu'un système de forces appliquées à un corps solide soit en équilibre*, il faut et il suffit *que la résultante de translation et le couple relatif à* UN *point* O *de l'espace soient nuls.*

La condition est suffisante.

Car l'hypothèse étant que R et K sont nuls, le système (R, K) est en équilibre. Le système donné équivalent à (R, K) est donc aussi en équilibre.

Elle est nécessaire.

L'hypothèse est maintenant que le système donné est en équilibre. Le système (R, K), qui lui est équivalent, est aussi en équilibre. Je vais montrer que R et K sont nécessairement nuls tous deux.

1° Si K n'était pas nul, ni R non plus, le couple K serait équilibré par une force unique R. Il pourrait alors être remplacé par une force unique R' égale et directement opposée à R, ce qui est impossible (94).

2° Si la force R seule était nulle, le couple K serait, à lui seul, en équilibre, ce qui est impossible (94).

3° Si K était nul, R serait, à elle seule, en équilibre, ce qui signifie que R serait nulle.

En résumé, R et K sont nécessairement nuls à la fois.

C. Q. F. D.

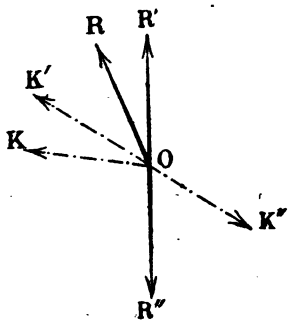
99. **Théorème.** — *Pour que deux systèmes de forces appliquées à un corps solide soient équivalents,* il faut et il suffit *qu'ils aient même résultante de translation et même couple résultant par rapport à* UN *point de l'espace.*

1° *La condition est suffisante.*

Car si les deux systèmes peuvent être remplacés par une même force R et un même couple K, ils sont équivalents.

2° *Elle est nécessaire.*

En effet, en transportant toutes les forces au même point O, les deux systèmes peuvent être remplacés par une force R et un couple K et par une force R′ et un couple K′. Soient R″ et K″ une force et un couple égaux et directement opposés à R′ et K′; le système (R″, K″) fait équilibre à (R′, K′) et par suite au système équivalent (R, K). Donc la résultante de R et R″ est nulle et la résultante de K et K″ est nulle (19); c'est-à-dire que R et K sont égaux et directement opposés respectivement à R″ et K″ et par suite coïncident avec R′ et K′. C. Q. F. D.



Corollaire. — La réduction à une résultante et à un couple de translation n'est possible que d'une seule manière pour un point donné.

100. **Théorème.** — *Pour que les forces appliquées à un corps solide se réduisent à un couple,* il faut et il suffit *que la résultante de translation soit nulle.*

1° *La condition est nécessaire.*

Car si les forces sont remplacées par un couple, la résultante de translation de celui-ci étant nulle, la résultante du système donné est aussi nulle (99).

2° *La condition est suffisante.*

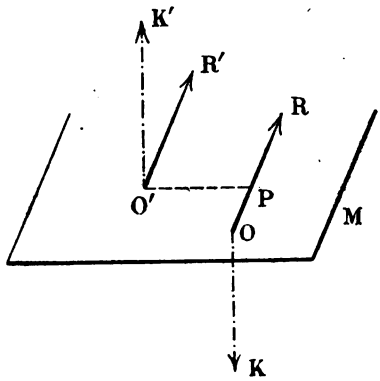
Car si la résultante de translation est nulle, il ne reste plus que le couple K.

101. **Théorème.** — *Pour que les forces appliquées à*

un corps solide aient une résultante unique, il faut et il suffit *que le couple résultant soit nul ou que son plan soit parallèle à la résultante de translation.*

1° *La condition est nécessaire.*

En effet, si K n'est pas nul, soient R et K la résultante de translation et l'axe du couple relatif au point O, O'R' la résultante unique. R' sera égale, parallèle à R et de même sens (97 et 99).



Je puis transporter la force OR en O'R' en y adjoignant un couple ayant pour axe O'K' perpendiculaire au plan ORO'. Les forces ainsi transportées au point O' devant se réduire à R', le couple résultant des couples K et K' doit être nul ; donc l'axe OK est parallèle à O'K', c'est-à-dire perpendiculaire au plan O'OR et par suite à R.

2° *La condition est suffisante.*

En effet, si K est nul, il ne reste que R ; si K est perpendiculaire sur R, dans le plan M mené par OR perpendiculairement à OK, je prends un point O distant de R de

$$O'P = \frac{OK}{R}$$

Dès lors, on pourra transporter OR en O'R' en y adjoignant un couple ayant pour axe

$$O'K' = R \times O'P = OK.$$

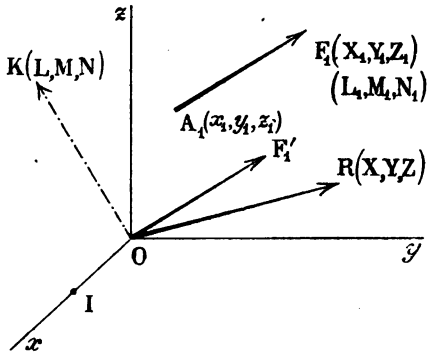
On pourra de plus choisir O' du côté de OR qui est tel

que O'K' soit de sens contraire à OK. Alors les couples K et K' se détruisent et les forces se réduisent à R'.

C. Q. F. D.

Corollaire. — *Pour qu'une force et un couple aient une résultante unique,* il faut et il suffit *que la force soit parallèle au plan du couple.*

* 102. **Expressions analytiques des résultats précédents.** — Soient Ox, Oy, Oz trois axes coordonnés rectangulaires ; A_1F_1, A_2F_2, ... les forces données par leurs composantes X_1, Y_1, Z_1 ; X_2, Y_2, Z_2 ; .... et les coordonnées x_1, y_1, z_1 ; x_2, y_2, z_2 ; ....



de leurs points d'application. Je transporte les forces au point O et je vais déterminer la résultante de translation R et le couple K, en calculant, au moyen des données, la valeur de R, ses composantes X, Y, Z et les angles α, β, γ qu'elle fait avec les axes, puis la valeur de l'axe du couple K, ses composantes L, M, N et les angles λ, μ, ν qu'il fait avec les trois axes coordonnés.

1° *Calcul de la résultante de translation.* — La force F'_1, égale et parallèle à F_1, a, comme cette force, pour composantes X_1, Y_1, Z_1. On aura donc (37)

$$X = \Sigma X_1, \qquad Y = \Sigma Y_1, \qquad Z = \Sigma Z_1,$$

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

$$\cos\alpha = \frac{X}{R}, \qquad \cos\beta = \frac{Y}{R}, \qquad \cos\gamma = \frac{Z}{R}.$$

2° *Calcul du couple résultant.* — On aura de même, en dési-

gnant par K_1 l'axe du couple introduit par la translation de la force A_1F_1 et par L_1, M_1, N_1 ses trois composantes,

$$L = \Sigma L_1, \qquad M = \Sigma M_1, \qquad N = \Sigma N_1,$$

$$K = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}.$$

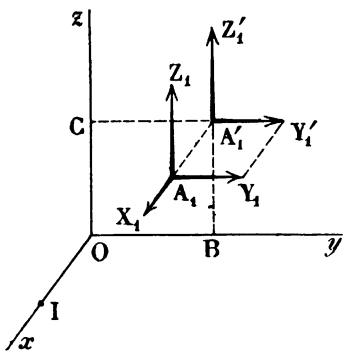
$$\cos\lambda = \frac{L}{K}, \qquad \cos\mu = \frac{M}{K}, \qquad \cos\nu = \frac{N}{K}.$$

Quant aux valeurs de L_1, M_1, N_1, elles se calculent, comme il suit, au moyen des données.

L_1 est la projection de K_1 sur Ox. C'est donc le moment du couple K_1 par rapport au segment OI, égal à $+1$, compté sur Ox (93). Or, des deux forces de ce couple, l'une passe par O; son moment est nul. L'autre force est A_1F_1. Son moment est la somme algébrique des moments des composantes, savoir :

$$L_1 = 6(OIA_1X_1 + OIA_1Y_1 + OIA_1Z_1).$$

Calculons chacun des termes de cette somme. A_1X_1 étant parallèle à OI, le premier terme est nul. Pour le second, je peux transporter chacun des sommets A_1 et Y_1 du tétraèdre parallèlement à l'arête OI, sans changer la valeur du tétraèdre. Je peux donc les amener respectivement en A_1' et Y_1' dans le plan yOz. Le tétraèdre OIA_1Y_1 est ainsi remplacé par le tétraèdre $OIA_1'Y^1$ dont la mesure est intuitive. Ainsi l'on a, dans le cas de la figure ci-contre, où toutes les données X_1, Y_1, Z_1, x_1, y_1, z_1 sont positives,



$$OIA_1Y_1 = OIA_1'Y_1' = -\frac{OI}{3}.\text{tr. } OA_1'Y_1' = -\frac{1}{6}\,OI.A_1'Y_1'.OC,$$

et enfin, en remplaçant ces trois segments par leurs valeurs $+1$, Y_1 et z_1,

$$6\,OIA_1Y_1 = -z_1Y_1.$$

Cette formule subsiste dans tous les cas de figure. D'abord les valeurs absolues des deux membres sont toujours égales. Quant aux signes, il suffit de remarquer que, si l'un des deux facteurs du second membre change de signe, la disposition de la figure fait que le sens du tétraèdre $OIA_1'Y_1'$ est changé. Le premier

membre de l'égalité change donc de signe, comme le second, et l'égalité reste vraie. On voit de même que l'on a, dans tous les cas de figure,

$$6OIA_1Z_1 = + y_1Z_1.$$

En résumé, le moment L_1 est donné par la formule

$$L_1 = y_1Z_1 - z_1Y_1.$$

Les valeurs de M_1 et de N_1 se déduisent de celle-ci par une permutation circulaire simultanée sur les trois groupes de lettres L, M, N ; x, y, z ; X, Y, Z. On a ainsi

$$M_1 = z_1X_1 - x_1Z_1, \qquad N_1 = x_1Y_1 - y_1X_1.$$

3° *Équations d'équilibre d'un corps solide* (98).

En conservant les notations précédentes, écrivant que R et K sont nuls, on obtient les six équations nécessaires et suffisantes pour qu'il y ait équilibre, et appelées pour cette raison les six équations d'équilibre ; on les écrit, en remplaçant L_1, M_1, N_1 par leurs valeurs,

$$(1)\quad \begin{cases} \Sigma X_1 = 0, \\ \Sigma Y_1 = 0, \\ \Sigma Z_1 = 0; \end{cases} \qquad (2)\quad \begin{cases} \Sigma(y_1Z_1 - z_1Y_1) = 0, \\ \Sigma(z_1X_1 - x_1Z_1) = 0, \\ \Sigma(x_1Y_1 - y_1X_1) = 0. \end{cases}$$

4° *Conditions d'équivalence de deux systèmes* (99).

En conservant la notation précédente pour un des systèmes, mettant un accent pour les éléments du second et exprimant que R et R′ et que K et K′ coïncident, il vient

$$(1)\quad \begin{cases} \Sigma X_1 = \Sigma X'_1, \\ \Sigma Y_1 = \Sigma Y'_1, \\ \Sigma Z_1 = \Sigma Z'_1; \end{cases} \qquad (2)\quad \begin{cases} \Sigma(y_1Z_1 - z_1Y_1) = \Sigma(y'_1Z'_1 - z'_1Y'_1), \\ \Sigma(z_1X_1 - x_1Z_1) = \Sigma(z'_1X'_1 - x'_1Z'_1), \\ \Sigma(x_1Y_1 - y_1X_1) = \Sigma(x'_1Y'_1 - y'_1X'_1). \end{cases}$$

5° *Conditions pour qu'un système de forces se réduise à un couple* (100).

Il suffit d'écrire que la résultante R est nulle :

$$\Sigma X_1 = 0, \qquad \Sigma Y_1 = 0, \qquad \Sigma Z_1 = 0.$$

6° *Conditions pour que les forces se réduisent à une force unique* (101).

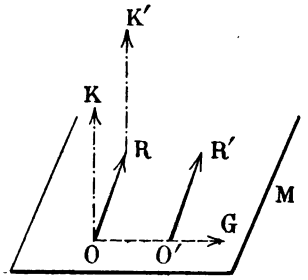
Pour exprimer que K est nul ou perpendiculaire sur R, on écrit que la projection de K sur R est nulle ; or la projection de K égale la somme algébrique des projections des trois composantes L, M, N dont les angles avec R sont α, β, γ ; on a donc

$$\text{proj. } K = L \cos\alpha + M \cos\beta + N \cos\gamma = 0 ;$$

ou, en remplaçant cos α, cos β, cos γ par leurs valeurs $\frac{X}{R}$, $\frac{Y}{R}$, $\frac{Z}{R}$, et chassant le dénominateur R,

$$LX + MY + NZ = 0.$$

7° *Coordonnées du point d'application de la résultante unique* (101).



Je porte la longueur

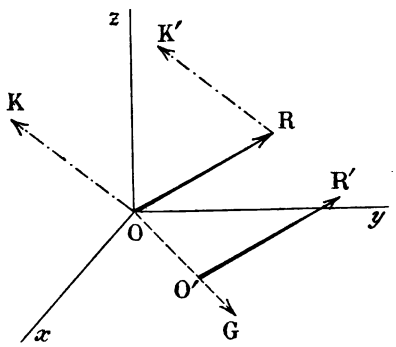
$$(1) \qquad OO' = \frac{K}{R}$$

sur une perpendiculaire OO' à OR, dans le plan M perpendiculaire à OK et dans un sens tel que le moment de R par rapport à O' (1) soit de sens contraire à OK. O'R', égale, parallèle à OR et de même sens, est la résultante cherchée (101). Cela posé, j'imagine la force qui serait représentée par RK', égale, parallèle à OK et de même sens. OO' est dirigé dans le sens du moment OG de cette force. D'ailleurs ce moment hypothétique a pour valeur

$$(2) \qquad OG = K \times R.$$

Divisant membre à membre les égalités (1) et (2), il vient

$$\frac{OO'}{OG} = \frac{1}{R^2}.$$



Les composantes de RK' sont L, M, N ; les coordonnées de son point d'application R sont X, Y, Z ; donc le moment OG a pour composantes

$$YN - ZM, \quad ZL - XN, \quad XM - YL ;$$

et on aura, en désignant par a, b, c les coordonnées du point O' et écrivant que OO', OG sont proportionnels à leurs projections sur les trois axes,

(1) J'appelle moment de la force R, par rapport au point O', l'axe du couple qu'il faut ajouter quand on transporte en O' le point d'application de cette force (96).

$$\frac{a}{NY - MZ} = \frac{b}{LZ - NX} = \frac{c}{MX - LY} = \frac{OO'}{OG} = \frac{1}{R^2};$$

d'où l'on tire

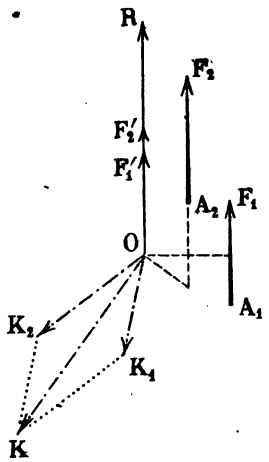
$$a = \frac{NY - MZ}{R^2}, \qquad b = \frac{LZ - NX}{R^2}, \qquad c = \frac{MX - LY}{R^2}.$$

Le point O' peut être pris pour point d'application de la résultante unique. On pourrait aussi prendre un point quelconque de O'R'.

* § IV. — Applications.

* 103. **Application de la méthode générale au cas des forces parallèles.** — 1° Géométriquement. — Soient les forces parallèles F_1, F_2, ...

Transportons les forces en un point O quelconque. La force A_1F_1 peut être remplacée par une force OF_1' égale, parallèle à F_1 et de même sens, et un couple dont l'axe OK_1 est perpendiculaire au plan OA_1F_1 et par suite à la droite OF_1' de ce plan. De même pour les autres forces. Les forces F_1', F_2', ..., comptées sur une même droite, ont une résultante égale à leur somme algébrique :

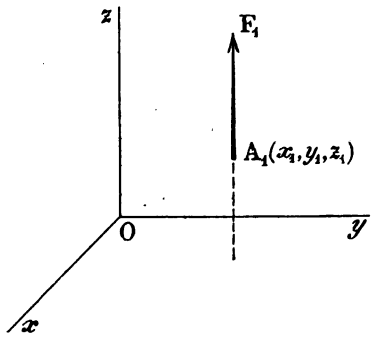


$$R = \Sigma F_1.$$

Les moments K_1, K_2, ..., étant perpendiculaires à la droite OR, sont dans un même plan perpendiculaire à OR ; la résultante OK de tous ces moments est située dans ce plan, et par suite perpendiculaire à OR. Donc, lorsque R n'est pas nul, R et K admettent une résultante unique qu'on détermine comme on sait (101), et on a la discussion suivante :

1°	$\Sigma F_1 \neq 0$,	résultante unique.
2°	$\Sigma F_1 = 0$,	en général couple unique K.
3°	$\Sigma F_1 = 0$, $K = 0$,	équilibre.

2° Par les formules. — Prenons pour axe Oz une parallèle à la direction des forces. On aura ainsi pour éléments de la force F_1 :



$$X_1 = 0,\quad Y_1 = 0,\quad Z_1 = F_1 ;$$
$$x_1,\qquad y_1,\qquad z_1 ;$$
$$L_1 = y_1 Z_1 - z_1 Y_1 = y_1 F_1,$$
$$M_1 = z_1 X_1 - x_1 Z_1 = -x_1 F_1,$$
$$N_1 = x_1 Y_1 - y_1 X_1 = 0.$$

De même pour les autres forces ; on en déduit pour la résultante de translation et le couple résultant :

$$X = 0,\quad Y = 0,\quad Z = \Sigma F_1 ;$$
$$R = \Sigma F_1 ;$$
$$L = \Sigma y_1 F_1,\qquad M = -\Sigma x_1 F_1,\qquad N = 0.$$

On a toujours

$$LX + MY + NZ = 0 ;$$

si donc on a $\Sigma F_1 \neq 0$, on a une résultante unique ; et les coordonnées de son point d'application sont (102)

$$x = \frac{-ZM}{R^2} = \frac{-M}{R} = \frac{\Sigma F_1 x_1}{\Sigma F_1},$$

$$y = \frac{ZL}{R^2} = \frac{L}{R} = \frac{\Sigma F_1 y_1}{\Sigma F_1},$$

$$z = 0.$$

En réalité, le point d'application étant arbitraire sur la direction de la résultante qui est ici parallèle à Oz, z est indéterminé et on peut prendre

$$x = \frac{\Sigma F_1 x_1}{\Sigma F_1},\qquad y = \frac{\Sigma F_1 y_1}{\Sigma F_1},\qquad z = \frac{\Sigma F_1 z_1}{\Sigma F_1}.$$

On reconnaît les coordonnées du centre des forces parallèles (43).

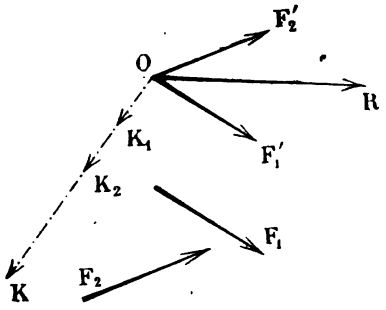
Discussion :

1° $\Sigma F_1 \neq 0$, résultante unique.

2° $\Sigma F_1 = 0$, couple.

3° $\Sigma F_1 = 0$, $\Sigma F_1 x_1 = 0$, $\Sigma F_1 y_1 = 0$, équilibre.

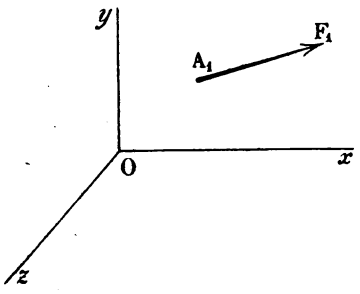
* 104. **Forces quelconques situées dans un même plan.** — 1° Géométriquement. — Soient les forces F_1, F_2, ... Si on transporte ces forces au point O du plan, en F'_1, F'_2, ..., celles-ci sont dans le même plan et par suite aussi leur résultante R. Les moments K_1, K_2, ... portés sur une même perpendiculaire au plan ont une résultante K dirigée suivant la même droite, par suite perpendiculaire sur la résultante R. Si donc celle-ci n'est pas nulle, R et K ont une résultante unique qu'on sait trouver (101).



Discussion :

1°	$R \neq 0$,	résultante unique.
2°	$R = 0$, $K \neq 0$,	couple K.
3°	$R = 0$, $K = 0$,	équilibre.

2° Par les formules. — Prenant deux axes rectangulaires Ox, Oy dans le plan des forces, et un axe Oz perpendiculaire à ce plan, on a pour éléments de la force F_1, par exemple :



$$\begin{cases} X_1,\ Y_1,\ Z_1 = 0; \\ x_1,\ y_1,\ z_1 = 0; \\ L_1 = 0,\ M_1 = 0, \\ N_1 = x_1Y_1 - y_1X_1. \end{cases}$$

On aura donc

$$X = \Sigma X_1,\quad Y = \Sigma Y_1,\quad Z = 0;$$

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2};$$

$$\cos\alpha = \frac{X}{R},\qquad \cos\beta = \frac{Y}{R},\qquad \cos\gamma = 0;$$

$$L = 0,\qquad M = 0,\qquad N = \Sigma(x_1Y_1 - y_1X_1);$$

$$K = N;$$

$$\cos\lambda = 0,\qquad \cos\mu = 0,\qquad \cos\nu = 1.$$

On a toujours

$$LX + MY + NZ = 0.$$

Si donc on a $R \neq 0$, les forces ont une résultante unique dont le point d'application a pour coordonnées (102)

$$x = \frac{KY}{R^2}, \qquad y = \frac{-KX}{R^2}, \qquad z = 0.$$

Discussion :

1° $R \neq 0$, résult. unique.

2° $\Sigma X_1 = 0, \quad \Sigma Y_1 = 0,$ en génér. coup.

3° $\Sigma X_1 = 0, \quad \Sigma Y_1 = 0, \quad \Sigma(x_1 Y_1 - y_1 X_1) = 0,$ équilibre.

Remarques. — 1° On peut se dispenser de prendre le troisième axe Oz, car les couples, étant tous dans un même plan, sont déterminés par les valeurs algébriques de leurs moments.

2° Les six équations d'équilibre se réduisent à trois : projections des forces sur deux axes du plan, et moments par rapport à un point du plan.

* **105. Forces parallèles situées dans un même plan.** — La théorie géométrique est la même que dans l'espace. En prenant les mêmes axes que précédemment, on a pour éléments de la force F_1,

$$F_1, \; x_1, \; y_1, \; z_1 = 0.$$

Les formules des forces parallèles donnent donc (43)

$$\alpha = \frac{S(F_1 x_1)}{S(F_1)}, \qquad \beta = \frac{S(F_1 y_1)}{S(F_1)}, \qquad \gamma = 0,$$

$$\alpha' = \frac{S(F'_1 x'_1)}{S(F'_1)}, \qquad \beta' = \frac{S(F'_1 y'_1)}{S(F'_1)}, \qquad \gamma' = 0.$$

En général, la résultante unique est donnée par les formules

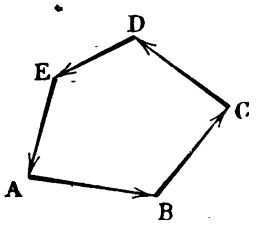
$$R = \Sigma F_1, \qquad x = \frac{\Sigma F_1 x_1}{\Sigma F_1}, \qquad y = \frac{\Sigma F_1 y_1}{\Sigma F_1}, \qquad z = 0.$$

Discussion :

(I) $\Sigma F_1 \neq 0$, résult. uniq.

(II) $\Sigma F_1 = 0$:
- 1° en général, couple.
- 2° $\dfrac{\Sigma F_1 x_1}{a} = \dfrac{\Sigma F_1 y_1}{b}$, éq. astatiq.
- 3° $\Sigma F_1 x_1 = 0, \quad \Sigma F_1 y_1 = 0,$ éq. statique.

***106. Réduction d'un système de forces représentées par les côtés d'un polygone plan fermé suivis dans un même sens de cheminement.**



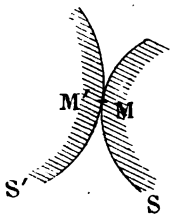
1° La résultante de translation est nulle, car les forces transportées en un même point étant égales et parallèles aux côtés d'un polygone fermé se font équilibre (32).

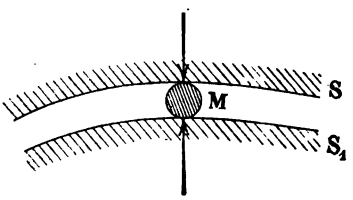
2° Le couple résultant pour un point O du plan a son axe perpendiculaire à ce plan, égal à deux fois l'aire du polygone (96).

Les forces se réduisent donc à ce couple, qui a pour plan celui des forces elles-mêmes.

§ V. — Solide gêné par des obstacles.

107. Réactions de deux corps solides l'un sur l'autre. — 1° Soient deux corps solides se touchant par leurs surfaces S et S′ au point M de la première, et au point M′ de la deuxième. Si la surface S par exemple est fixe, le point M′ obéira à toute force tendant à lui donner un déplacement extérieur à S; au contraire, tout déplacement *normal* à S et *dirigé vers l'intérieur* est impossible. Si donc on exerce sur le point M′ une force dans cette direction, cette pression sera détruite par la *réaction* de la surface S. Une force oblique peut se décomposer en deux, l'une normale, détruite par la réaction de la surface, l'autre tangentielle et qui produit le mouvement.

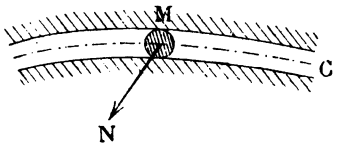




2° Quand on dit qu'un point matériel M est assujetti à décrire une surface S, on imagine qu'il soit compris entre la surface

S et une surface infiniment voisine S_1 de façon que ces surfaces puissent réagir chacune dans un sens.

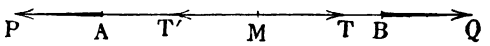
3° Si le point M est assujetti à décrire une ligne C, on doit imaginer qu'il est dans l'intérieur d'un tube de très petit diamètre, ayant pour axe la ligne C. Dès lors le point M ne pouvant subir aucun déplacement normal à cette ligne, toute force N appliquée au point M dans le plan normal sera détruite par la résistance de la ligne.



108. Mode d'action d'un fil. — Un fil ne résiste qu'aux efforts de traction, ce qu'on exprime de la façon suivante :

Pour que deux forces P *et* Q *appliquées aux extrémités d'un fil rectiligne tendu* AB *se fassent équilibre,* il faut et il suffit *que ces forces soient égales et dirigées suivant les prolongements du fil.*

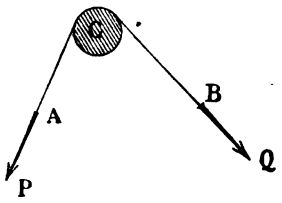
Partageons par la pensée ce fil en deux parties AM et BM ; la partie AM étant en équilibre sous l'action de la force P, le point M est soumis à une force $T = P$ dirigée en sens inverse de P ; de même la partie BM est soumise à une



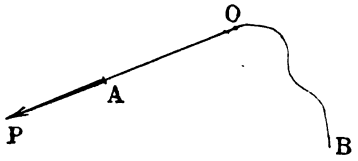
force $T' = Q$ appliquée au point M en sens inverse de Q. Donc au point M sont appliquées deux forces contraires, égales à la valeur commune de P et Q. *Cette valeur des deux forces* T *et* T′ *est la tension du fil. Elle tend à rompre le fil au point* M.

Corollaire. — La tension est la même tout le long d'un fil tendu libre.

Lorsqu'un fil s'appuie sur un obstacle nous admettrons encore que la condition d'équilibre est que les tractions P et Q soient égales, et appliquées suivant les prolongements des brins CA et CB. On voit, comme précédemment, que la tension est la même tout le long du fil.

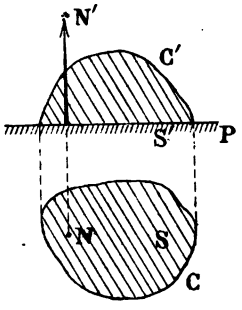


Au contraire si un fil est fixé par un de ses points O, une force AP appliquée au brin OA ne se communique pas à la partie OB où la tension peut être nulle et ne dépend que des forces appliquées au brin OB.



109. **Théorème.** — *Pour qu'un corps qui repose sur un plan inébranlable soit en équilibre*, il faut et il suffit *que les forces qui agissent sur lui se réduisent à une résultante normale au plan, dirigée vers lui et le perçant à l'intérieur du contour d'appui.*

Soit P le plan inébranlable. Je réprésente par deux projections C, C', un corps qui repose sur le plan P par la surface d'appui S, S'. J'examine d'abord quelles réactions peut offrir le plan P. Il ne peut exercer sur le corps C que des réactions normales, dirigées vers le haut et appliquées aux divers points de la surface S. Toutes ces forces ont une résultante N, N' normale au plan P et dirigée vers le haut. Enfin son point d'application est intérieur à la surface S. Cela posé :



1° *La condition de l'énoncé est nécessaire.* — L'hypothèse est qu'il y a équilibre. Ainsi la réaction N du plan fait équilibre à l'ensemble des forces appliquées au corps C. Ces forces ont donc une résultante égale et directement opposée à N. Cette résultante satisfait aux trois conditions de l'énoncé, d'après ce qu'on vient de dire sur N.

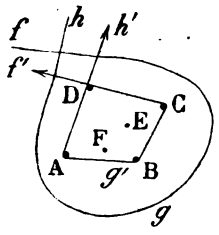
2° *La condition est suffisante.* — L'hypothèse est maintenant que les forces appliquées au corps C se réduisent à une force R normale au plan P, dirigée vers lui et le rencontrant en un point intérieur à S. Cette force est détruite par la réaction du plan P. C. Q. F. D.

Remarques. — 1° On peut, en se basant sur la règle de composition des forces parallèles, répartir la réaction résultante N d'une infinité de manières entre les différents éléments de la surface S. La répartition semble donc indéterminée. Mais ce résultat théorique ne répond à aucun cas naturel. Et, en effet, dans l'étude des *corps solides*, on néglige les déformations dues aux efforts qu'ils supportent (11). Cette approximation, suffisamment légitime en général, cesse de l'être dans cette partie de la question. Car ce sont précisément les déformations des corps solides qui mettent en jeu leurs *réactions élastiques*. La *théorie de l'élasticité des corps solides* est la science qui traite de ces questions. Elle est nécessaire pour résoudre entièrement celle qui nous occupe.

2° On peut, dans des cas particuliers simples, déterminer facilement la répartition de la réaction N. Si le corps C est un cylindre droit, homogène, reposant par sa base sur un plan horizontal, on peut admettre que, sauf une légère irrégularité sur le contour d'appui, la pression due au poids du corps se répartit également sur toute la surface S. Si le corps pesant repose sur trois points d'appui, ce qui est le cas d'un trépied, on aura à décomposer le poids du corps en trois forces verticales appliquées en ces trois points. Je laisse au

lecteur le soin de résoudre ce problème indiqué dans les exercices. Dès qu'il y a quatre points d'appui, comme dans une table, le problème devient indéterminé.

3° Si la surface d'appui est remplacée comme dans le cas du trépied et de la table, par un certain nombre de points d'appui isolés, A, B, C, D, E, F, on doit, dans l'énoncé du théorème, entendre par contour d'appui le polygone ABCD qui enveloppe tous les points d'appui, et dont les sommets sont eux-mêmes des points d'appui. Pour définir facilement ce polygone, on peut imaginer un fil dans la position *fgh*, entourant l'ensemble des points d'appui marqués par des piquets. Tirant alors sur les brins *f* et *h* jusqu'à tendre le fil, on amène celui-ci dans la position *f'g'h'* qui définit le polygone d'appui.



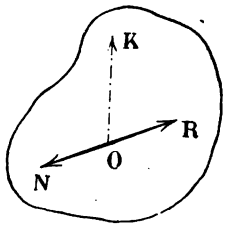
4° Si la verticale du centre de gravité d'un corps pesant tombe à l'extérieur du polygone d'appui, le poids du corps et la réaction du plan forment un couple dont l'effet est de faire basculer le corps autour d'une ligne ou d'un point d'appui. C'est ainsi qu'une voiture dont la charge est trop élevée au-dessus du sol risque de verser si une des roues vient à être accidentellement soulevée par un obstacle ou une inégalité du terrain.

110. Théorème. — *Pour qu'un solide qui a un point fixe soit en équilibre,* il faut et il suffit *que le couple résultant relatif à ce point soit nul.*

La fixité du point O ne peut offrir qu'une réaction N passant par ce point. Je transporte les forces en ce point ; soient R et K la résultante de translation et le couple. Cela posé :

1° *La condition de l'énoncé est nécessaire.*

Car s'il y a équilibre, le couple résultant des forces et de N relatif au point O est nul (98) ; comme le couple de N est nul, ce couple résultant se réduit à K, qui par suite est nul.



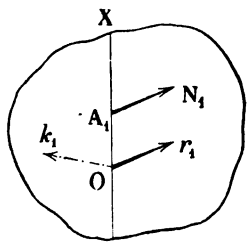
2° *Elle est suffisante.*

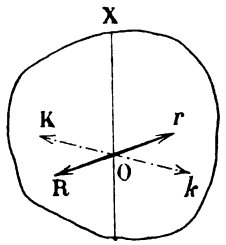
Car si K est nul, il ne reste que R, qui sera détruite par la réaction du point fixe, et il y aura équilibre.

Remarque. — La réaction du point fixe est égale et directement opposée à la résultante de translation.

111. Théorème. — *Pour qu'un solide qui a un axe fixe soit en équilibre*, il faut et il suffit *que le moment résultant des forces par rapport à cet axe fixe soit nul.*

En effet, l'axe fixe X ne peut offrir que des réactions telles que A_1N_1 passant par l'un de ses points. On peut transporter cette réaction en un point O de X, en Or_1, en y adjoignant un couple dont l'axe k_1 est perpendiculaire sur X. Si on fait de même pour toutes les réactions, on aura une résultante de translation r; les axes des couples k_1, k_2, ... étant dans un même plan perpendiculaire à X, leur résultante k sera perpendiculaire sur X. Je transporte aussi les forces au point O. Soient R et K la résultante et le couple de translation. Cela posé :





1° *La condition de l'énoncé est nécessaire.*

Car la résultante de K et de k de-

vant être nulle, K doit être directement opposé à k, c'est-à-dire perpendiculaire sur X. Donc la projection de K sur X, c'est-à-dire le moment résultant des forces par rapport à X, est nul.

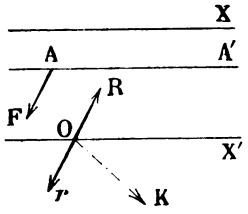
2° *La condition est suffisante.*

Car si le moment résultant des forces par rapport à X est nul, K est perpendiculaire sur X, on peut alors faire passer par X le plan du couple K ; dès lors les forces du couple, rencontrant l'axe, seront détruites par la résistance de cet axe. D'ailleurs il en est de même de R. Donc il y a équilibre.

Remarque. — Les réactions de l'axe sont indéterminées : 1° à cause de l'indétermination du point O ; 2° par suite des transformations qu'on peut faire subir au couple K. La théorie de l'élasticité est nécessaire pour terminer la question.

* 112. **Théorème.** — *Pour qu'un solide qui peut seulement glisser le long d'un axe fixe soit en équilibre*, il faut et il suffit *que la somme des projections des forces sur cet axe soit nulle.*

Chaque point A est assujetti à décrire une parallèle AA′ à l'axe X. La réaction de cette ligne ne peut donc être que perpendiculaire à AA′ au point A.



Si donc on transporte ces réactions en un point O quelconque de l'espace, leur résultante de translation r sera perpendiculaire à la direction X. Je transporte aussi les forces au point O. Soient R et K la résultante et le couple de translation. Cela posé :

1° *La condition de l'énoncé est nécessaire.*

Car s'il y a équilibre, la résultante de R et de r est nulle ; donc R directement opposée à r est perpendiculaire sur X, et la somme des projections des forces sur X est nulle.

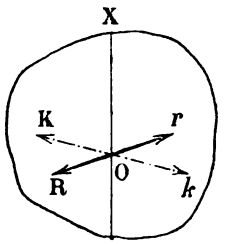
2° *Elle est suffisante.*

En effet, si elle est satisfaite, R est perpendiculaire sur la pa-

rallèle à X menée par le point O. Elle est donc détruite par la résistance de cette ligne. En second lieu, la direction des forces du couple K est arbitraire dans le plan de ce couple, et on peut prendre cette direction parallèle à l'intersection des plans perpendiculaires sur K et sur X. Ces forces étant perpendiculaires sur X, leur action est détruite par la résistance des parallèles à X menées par leurs points d'application.

* 113. **Théorème.** — *Pour qu'un corps solide qui peut tourner autour d'un axe et glisser le long de cet axe soit en équilibre,* il faut et il suffit *que le moment résultant des forces appliquées à ce corps par rapport à cet axe soit nul et que la somme de leurs projections sur cet axe soit nulle.*

En effet, l'axe X ne peut offrir que des réactions normales. Si donc on transporte ces réactions en un point O quelconque de l'axe, on obtient une résultante de translation r et un couple k tous deux perpendiculaires sur X. Transportons aussi au point O les forces appliquées au corps. Soient R et K la résultante et le couple de translation. Cela posé :



1° *La condition de l'énoncé est nécessaire.*

Car s'il y a équilibre, les résultantes de R et r, et de K et k sont nulles ; c'est-à-dire que R et K sont égales et directement opposées respectivement à r et k. Donc la somme des moments par rapport à X, et la somme des projections des forces sur X sont nulles.

2° *La condition est suffisante.*

Car si elle est satisfaite, R et K sont perpendiculaires sur X. Dès lors R est détruite par la résistance de l'axe. D'ailleurs on peut faire passer le plan du couple K par X et choisir dans ce plan les forces du couple perpendiculaires sur X ; elles sont alors détruites par la résistance de cet axe et il y a équilibre.

EXERCICES PROPOSÉS SUR LE CHAPITRE III

Voici d'abord quelques applications simples relatives aux forces situées dans un même plan. Dans les applications numériques, à moins d'indication contraire, les unités seront le mètre et le kilogramme.

1. Trouver une force dont les composantes par rapport à deux axes rectangulaires Ox, Oy sont $X = +5$, $Y = -3$ et dont le moment par rapport au point O est $k = -1,3$.

2. Une force AP est donnée en grandeur et position ; trouver le lieu des points O tels que le moment de AP par rapport au point O ait une valeur k.

Application : $AP = 25$, $k = -12,5$.

3. Un corps solide, mobile autour d'un point O, est sollicité par une force fixe AP dont le moment par rapport au point O a pour valeur k. Trouver le lieu des projections du point O sur les forces BQ, de grandeur donnée et capables d'équilibrer AP.

Application : $AP = 250$, $k = 275$, $BQ = 300$.

4. Aux données de la question 2, on ajoute celle d'un point B du plan OAP ; puis on considère toutes les forces BQ de grandeur arbitraire, mais issues du point B, et qui sont capables d'équilibrer AP. Trouver : 1° le lieu des projections du point O sur ces forces BQ ; 2° le lieu de leurs extrémités Q. 3° Déterminer parmi ces forces BQ celle qui a la grandeur donnée 300^{kg}.

5. Trois forces données dans un même plan sont appliquées à un corps solide. Quel point de ce corps faut-il fixer pour que les trois forces soient équivalentes sur le solide qui a ce point fixe ?

6. Trouver une force qui ait pour moments k, k', k'' par rapport à trois points donnés O, O′, O″ non situés en ligne droite.

Application : $k = +30$, $k' = +25$, $k'' = -30$.

7. Qu'arrive-t-il si les trois moments donnés de la question n° 6 sont nuls?

8. On donne deux axes rectangulaires Ox, Oy et, dans leur plan, trois forces P_1, P_2, P_3. Leurs bras de levier par rapport au point O sont en grandeur et en signe d_1, d_2, d_3. Elles font avec l'axe Ox les angles α_1, α_2, α_3. Déterminer la résultante de ce système.

Application : $P_1 = 1^{kg}$, $P_2 = 2^{kg}$, $P_3 = 3^{kg}$;

$d_1 = +3^m$, $d_2 = -2^m$, $d_3 = +1^m$;

$\alpha_1 = -30°$, $\alpha_2 = +30°$, $\alpha_3 = +45°$.

Les exercices suivants sont d'un ordre de difficulté un peu plus élevé.

9. On donne un tétraèdre OABC dont l'angle trièdre O est trirectangle. Suivant les arêtes du tétraèdre sont appliquées six forces représentées par OA, OB, OC; BC, CA, AB.

Déterminer : 1° la résultante de translation ; 2° l'axe du couple relatif au point O. 3° Prouver que les six extrémités des composantes de ces deux vecteurs suivant les trois arêtes du trièdre O sont sur une même sphère.

Application : $OA = 4^c$, $OB = 6^c$, $OC = 10^c$. De plus, la longueur OA représente une force de 2^{kg}.

10. On donne deux forces AP et BQ. Trouver un point O tel que si l'on y transporte ces forces, le couple qui provient de P soit équivalent à un couple donné dont le plan est parallèle à AP et que le couple qui provient de Q ait un moment de grandeur donnée.

11. *Électromagnétisme.* — L'action d'un élément de courant MN sur un pôle magnétique austral A est une force F perpendiculaire sur le plan AMN, dans un sens tel qu'elle porte A vers la gauche du courant. Elle a pour intensité $F = \mu . \frac{MN . \sin AMN}{\overline{AM}^2}$, la constante μ ne dépendant que des intensités du courant et du pôle magnétique. Enfin la force F est appliquée, non pas au point A lui-même, mais passe par le point où est situé l'élément de courant. Cela signifie que si le pôle A appartient à un corps solide aimanté, ce corps solide se déplace comme s'il subissait la force F en un point qui coïnciderait avec la position actuelle de l'élément MN. C'est paradoxal, mais c'est une donnée de l'expérience. Cette loi étant admise, établir les résultats suivants :

1° Si l'on transporte la force F au point A, l'axe du couple qu'il faut lui adjoindre est représenté en grandeur, direction et sens par la perspective mn de cet élément sur une sphère de centre A et de rayon μ ;

2° Le couple résultant de toutes les forces dues aux éléments d'un courant fini CC′ a pour axe la droite cc' qui joint l'origine à l'extrémité de la projection du courant CC′ sur la même sphère.

Ces résultats sont d'une grande utilité dans l'étude des expériences d'Ampère.

12. Des couples représentés en grandeur et orientation par les faces d'un polyèdre fermé (vues toutes de l'extérieur dans le sens dextrorsum, par exemple) se font équilibre.

On pourra avantageusement, pour démontrer ce théorème, utiliser le résultat du n° 106.

13. Des forces normales aux faces d'un tétraèdre, proportionnelles à ces faces, appliquées à leurs centres de gravité et dirigées toutes vers l'extérieur ou toutes vers l'intérieur, se font équilibre. Étendre ce résultat à un polyèdre quelconque.

Les dernières questions ont une généralité et une importance qui en font un complément à la théorie. Ce caractère s'accentue dans les questions suivantes. Voici d'abord un groupe de propriétés qui rentrent dans la théorie des moments par rapport à une droite.

14. Si n forces se font équilibre sur un corps solide, et si une droite rencontre $n-1$ d'entre elles, elle rencontre la n^e.

15. Appliquer le théorème de la question 14 au cas de trois forces. En conclure que si trois forces se font équilibre, elles sont dans un même plan.

16. Soient deux systèmes de forces appliquées à un corps solide, $P_1, P_2, \ldots\ldots$, et $Q_1, Q_2, \ldots\ldots$ Si l'on considère la somme algébrique de tous les tétraèdres qu'on peut former en prenant pour arêtes opposées une force P du premier système et une force Q du second, cette somme est constante, quels que soient les deux systèmes choisis parmi tous les systèmes équivalents respectivement aux deux systèmes considérés.

Ce théorème est une conséquence du n° 91, comme cela est mis en évidence par la formule symbolique

$$(P_1 + P_2 + \ldots)(Q_1 + Q_2 + \ldots) = (P'_1 + P'_2 + \ldots)(Q'_1 + Q'_2 + \ldots),$$

laquelle exprime le théorème et dont la signification est celle-ci : les P' et Q' sont les forces des deux nouveaux systèmes équivalents aux premiers ; on imagine qu'on développe les deux membres par la règle de multiplication de deux polynomes. Enfin, le produit une fois développé, on convient que PQ représente le tétraèdre qui a pour arêtes opposées les forces P et Q. Cette formule, qui conduit à la démonstration de la question 16, conduit aussi facilement à l'énoncé de corollaires remarquables. D'abord, en supposant que le système Q est équivalent au système P et faisant coïncider les systèmes P' et Q' avec P, on obtient cet énoncé :

17. La somme algébrique des tétraèdres construits de toutes les façons possibles avec une force d'un premier système et une force d'un second système équivalent au premier est égale au double de la somme algébrique des tétraèdres qu'on peut construire avec les forces du premier système prises deux à deux.

Puis en faisant coïncider Q avec P et Q' avec P' :

18. La somme algébrique des tétraèdres construits sur les forces d'un système, prises deux à deux, égale la somme algébrique des tétraèdres construits avec les forces d'un quelconque des systèmes équivalents au premier. (Mœbius.)

Trois cas particuliers de ce théorème sont les suivants :

19. Si un système de forces est réductible à une force ou à un couple, la somme algébrique des tétraèdres construits avec les forces de ce système prises deux à deux est nulle.

20. De quelque façon qu'on réduise à deux les forces appliquées à un corps solide, le volume du tétraèdre construit sur ces deux forces est constant. (Chasles.)

21. De quelque façon qu'on réduise à une force et à un couple les forces appliquées à un corps solide, on obtient un tétraèdre constant en menant par un même point trois vecteurs représentés respectivement par la résultante de translation, la force et le bras de levier du couple. Ce tétraèdre est équivalent à celui de la question 20.

La question 21 met sur la voie des suivantes :

22. De quelque façon qu'on réduise à une force et à un couple les forces appliquées à un corps solide, la projection de l'axe du couple sur la résultante de translation est constante.

23. Faire la réduction de façon que le couple soit minimum. Le lieu des points pour lesquels le couple est minimum est une parallèle à la résultante de translation appelée axe central. L'axe du couple minimum est perpendiculaire à cet axe.

24. Étudier la disposition des axes des couples résultants quand le point où l'on transporte les forces occupe toutes les positions de l'espace autour de l'axe central.

25. Réduire les forces appliquées à un solide, à deux forces qui fassent entre elles un angle donné, l'une d'elles ayant son point d'application sur l'axe central et l'autre étant perpendiculaire à cet axe.

Voici un exercice qui peut être rattaché à cette série de questions :

26. On donne deux systèmes de points $A_1, A_2, \ldots, A_n$; $B_1, B_2, \ldots, B_p$, de masse $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$; $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$. Les masses totales de ces systèmes sont α et β et les centres de gravité A et B. On considère la force représentée par le segment A_iB_k multiplié par le produit $\alpha_i\beta_k$ des masses des deux points A_i et B_k, et on applique toutes les forces ainsi obtenues en combinant deux à deux les points du premier système avec les points du second. Démontrer que ce système de np forces admet une résultante unique représentée par $\alpha\beta AB$.

Ce théorème peut se représenter par la formule symbolique

$$(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots + \alpha_n A_n)(\beta_1 B_1 + \beta_2 B_2 + \ldots + \beta_n B_n) = \alpha\beta AB,$$

analogue à la formule de la question 16.

Cette question 26 conduit comme la question 16 à des cas particuliers intéressants. Nous laissons au lecteur le soin de les découvrir. Bien d'autres théorèmes de natures en apparence très diverses peuvent être ainsi représentés symboliquement par la règle de multiplication des polynomes. Je les ferai connaître ailleurs en temps opportun. Dans cette catégorie rentrent les théorèmes suivants relatifs aux moments linéaires.

Dans ces théorèmes, j'appellerai *moment linéaire*, ou plus brièvement *moment* d'une force AP par rapport à un point O, l'axe du couple qui provient de la translation de la force AP au point O (n° 96).

27. Le moment de la résultante de forces concourantes par rap-

port à un point quelconque est la résultante des moments de ces forces par rapport au même point.

28. Adapter à ces nouveaux moments la théorie du § I relative aux moments par rapport à un segment de droite (nos 87 à 96).

Voici un complément d'une tout autre nature qui pourra être d'une grande utilité pratique pour les élèves :

29. Écrire les équations d'équilibre d'un solide gêné par un obstacle, dans les cas examinés aux nos 109 à 113.

30. Faire des applications numériques de ces équations.

CHAPITRE IV

MACHINES SIMPLES

§ I. — Généralités. — Plan incliné.

114. Définition et classification des machines simples. — Une *machine* est formée d'un corps ou d'un système de corps mobiles gênés par des obstacles fixes. Considérée à l'*état statique*, elle sert à équilibrer une force à *vaincre* appelée *résistance*, au moyen d'un effort appelé *force motrice* ou *puissance*. Quand cet équilibre a lieu, la machine reste au repos, ou, si elle a d'abord été mise en mouvement, ce mouvement demeure uniforme [1]. Si la puissance l'emporte sur la résistance, le mouvement *s'accélère* dans le sens où agit la puissance. Dès que la résistance l'emporte, le mouvement est retardé. Bientôt la machine s'arrête et prend même, quand les *liaisons* le permettent, un mouvement inverse. Mais nous laisserons de côté ces phénomènes *cinématiques* et *dynamiques*, pour ne nous occuper que de l'équilibre entre la puissance et la résistance. A cet égard, le but de la machine est le plus souvent de vaincre une résistance déterminée avec une puissance plus faible qu'elle.

On appelle *machines simples* celles qui se composent *d'un seul* corps solide gêné par des obstacles fixes. Elles se rattachent à trois types.

1° Solide reposant sur un plan inébranlable : *plan incliné*.

---

(1) On néglige ici l'influence des frottements qui agissent toujours en sens inverse de la force prépondérante.

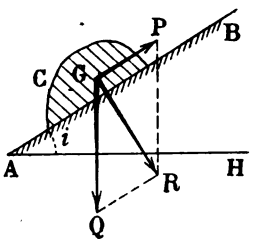
2° Solide qui a un point fixe : *levier*.

3° Solide qui a un axe fixe : *treuil*.

Les conditions générales d'équilibre de ces machines ont été établies aux n°s 109, 110 et 111. Il nous reste à appliquer les résultats trouvés et à en signaler les conséquences pratiques.

115. **Principe du plan incliné.** — Le but est de soulever un fardeau C avec une puissance P inférieure au poids Q du fardeau.

Pour cela, on le place sur un *plan incliné* AB et on exerce sur lui une traction P parallèle à la ligne de pente AB et dans le sens de la montée. Nous allons calculer la valeur qu'il faut donner à P pour que C soit en équilibre sous l'action des forces P et Q. Il faut et il suffit (109) que la résultante R de ces deux forces soit normale au plan AB. J'exprime ce fait en écrivant que les angles du parallélogramme des forces GQRP ont pour valeurs



$\widehat{QGR} = \widehat{BAH}$, comme ayant leurs côtés respectivement perpendiculaires,

$$\widehat{RGP} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\widehat{PGQ} = \widehat{PGR} + \widehat{RGQ} = \frac{\pi}{2} + \widehat{BAH}.$$

Si je porte ces valeurs dans les formules

$$\frac{P}{\sin(QR)} = \frac{Q}{\sin(RP)} = \frac{R}{\sin(PQ)}, \qquad (31)$$

en désignant par i l'inclinaison $\widehat{BAH}$ du plan AB, il vient

$$(1) \qquad \frac{P}{\sin i} = \frac{Q}{1} = \frac{R}{\cos i}.$$

La puissance P capable d'équilibrer le poids Q est donc

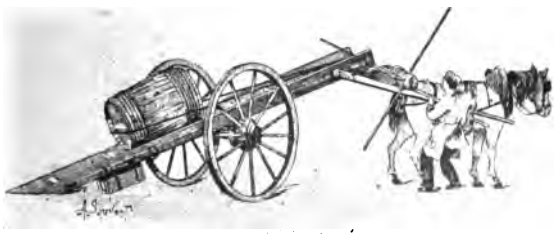
$$P = Q \sin i.$$

Elle est inférieure à la résistance. La pression du corps C sur le plan AB est, d'après les formules (1),

$$R = Q \cos i.$$

Il importe de la connaître afin d'assurer au plan P une rigidité suffisante pour résister à la rupture.

116. Usages du plan incliné. — La principale application du plan incliné se trouve dans le *haquet* inventé par *Pascal*. C'est cette espèce de charrette allongée qui sert à transporter les tonneaux et dont la figure offre le dessin. Pour charger ou décharger un tonneau, on accule la charrette,



de façon à faire reposer sur le sol sa partie postérieure. La force P fournie par l'homme agit sur le tonneau à l'aide d'une corde et d'un treuil sur lequel s'enroule la corde ; nous verrons plus loin (132 et 133) que le treuil sert aussi à diminuer la puissance nécessaire pour vaincre une résistance donnée.

Le *binard*, ce chariot bas sur roues, qui sert à transporter les pierres de taille, est fondé sur le même principe. Ajoutons que ces appareils sont disposés de façon à réduire et à rendre à peu près négligeable le frottement du fardeau sur le plan incliné. Ce frottement, dû aux déformations que nous avons

négligéees dans la théorie, aurait deux effets fâcheux : celui de s'opposer à l'action de la force motrice P et celui de détériorer les deux corps en contact.

§ II. — Levier.

117. Principe du levier. — « *Qu'on me donne un point d'appui*, a dit Archimède, *et je soulèverai le monde.* » Ainsi, soulever un fardeau, si lourd qu'il soit, avec une puissance donnée, même faible, au moyen d'un corps rigide appelé *levier*, reposant sur un *point fixe*, voilà le principal but du levier. Négligeons son poids ; soit Q la résistance, P la puissance, O le point d'appui (1re fig. du n° 118). Pour qu'il y ait équilibre, il faut et il suffit que les couples qui proviennent du transport des forces P et Q au point O se détruisent (110). Il faut donc que leurs plans OP et OQ coïncident ; puis les forces doivent tendre à faire tourner le levier en sens inverse. Enfin les valeurs absolues de leurs moments par rapport au point O doivent être égales. Soient p et q les distances de ces forces au point O. Ces distances sont les *bras de levier*. Les moments des forces P et Q ont respectivement pour valeurs absolues Pp et Qq. On doit donc avoir, pour l'équilibre du levier,

$$(1) \qquad Pp = Qq.$$

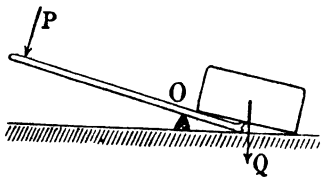
Comme on voit, quelque petite que soit la puissance par rapport à la résistance, la formule (1) permettra toujours de déterminer des bras de levier de façon qu'il y ait équilibre. Pratiquement, cette conséquence extrême de la théorie n'est pas applicable. On est limité d'une part par le défaut de résistance du levier et d'autre part par son poids, que nous avons négligé et qui agit généralement dans le sens de la résistance avec d'autant plus d'intensité que le bras de la

résistance est plus grand. Moyennant ces restrictions, on peut énoncer les résultats ainsi :

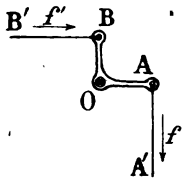
Quand un levier est en équilibre : 1° la puissance et la résistance sont dans un même plan avec le point d'appui ; 2° elles tendent à faire tourner le corps en sens inverse ; 3° les deux forces sont inversement proportionnelles à leurs bras de levier.

La *charge du point d'appui* est la résultante R des forces P et Q. Si ces forces sont parallèles, R est égale à leur somme ou à leur différence. Si les forces sont concourantes, R se calcule par les formules du n° 31.

118. Applications du levier. — Le principal levier est la *pince à talon*. C'est cette tige de fer représentée par la figure et qui sert à soulever les pierres de taille. Il réalise bien le but d'Archimède ; mais ce n'est pas le seul usage du levier. Il sert aussi comme simple transmission de mouvement.



C'est le cas du *levier coudé* AOB des anciennes sonnettes de serrurier. On tire sur le cordon vertical AA′ dans le sens de la flèche *f*. Le cordon horizontal BB′ est alors déplacé dans le sens *f′*.

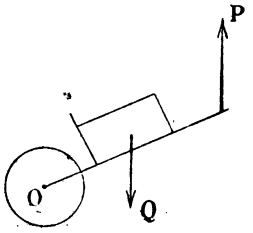


A ce point de vue, on distingue *trois genres de leviers rectilignes*.

Dans ceux du *premier genre*, le point d'appui est entre les deux forces ; c'est le cas de la pince à talon.

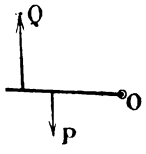
Dans ceux du *second genre*, la résistance est entre le point d'appui et la puissance. Dans ce genre rentre la *brouette*, dont l'invention est attribuée à Pascal. Le point d'appui est l'axe O de la roue ; la résistance est le poids Q dont

est chargée la brouette ; la puissance P, décomposée en deux, est exercée sur les manches par le porteur de la brouette.



Dans le levier du troisième genre, la puissance est entre la résistance et le point d'appui. C'est le cas des pédales qui servent dans les machines à coudre et dans les meules à repasser les couteaux. La puissance P est exercée par la pression du pied ; la résistance Q vient du travail de la machine : elle s'exerce par une tige verticale.

En réalité, dans tous ces cas, le corps solide est mobile, non pas autour d'un point fixe, comme le voudrait la définition du levier donnée au n° 114, mais autour d'un axe fixe. Cela a peu d'importance, parce que les forces y sont toujours dans un même plan perpendiculaire à l'axe de rotation. Les choses se passent comme si le corps était mobile autour du point où ce plan rencontre l'axe. C'est pour la même raison qu'on peut rattacher au levier les balances et les poulies, que nous allons étudier.



§ III. — Balances.

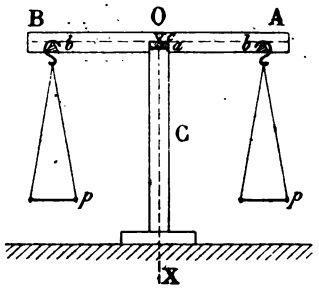
119. **Principe de la balance.** — L'élément essentiel d'une balance est *un levier* servant à comparer deux poids P et Q au moyen de la relation (1) du n° 117. On peut écrire cette relation.

$$(1) \qquad Q = \frac{p}{q} \cdot P.$$

$\frac{p}{q}$ est connu par la construction de la balance ; P est un poids

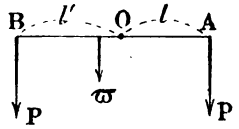
étalonné connu, un certain nombre de grammes, par exemple, qui équilibre le poids cherché Q d'un corps quelconque. Q est alors donné par la formule (1). Suivant l'usage auquel elle est destinée, la balance affecte différentes formes. Nous allons étudier les principaux types.

120. Balance ordinaire et balance de précision. — Ces deux balances ne diffèrent que par des détails de finesse, fondamentaux, il est vrai, mais qui ne les distinguent pas au point de vue théorique. Notre description visera plutôt la balance de précision, mais en laissant de côté les détails accessoires et qui varient d'une balance à une autre. Le *levier*, partie essentielle, est une tige AOB appelée *fléau*, qui offre deux plans de symétrie ; l'un est le plan du papier ; l'autre, de profil, a pour trace OX. Sur la face antérieure, la figure montre trois couteaux d'acier. L'un *c* a son tranchant en-dessous et repose sur le plan d'agate *a* qui surmonte la colonne C. Il supporte le fléau et, par son intermédiaire, toute la partie mobile de la balance. Les deux autres couteaux *b*, *b*, aux deux extrémités A et B, ont leur tranchant en dessus et supportent les plateaux *p*, *p*. Le but de ce dispositif est d'éviter les frottements aux points A, B, O, de façon à rendre la mobilité aussi grande que possible. Si la symétrie de la balance, par rapport au plan de profil qui passe par la verticale OX du couteau O, est réalisée avec une rigueur suffisante, des charges égales mises dans les deux plateaux imposent au fléau une position d'équilibre horizontale. Quand cette condition est réalisée, la balance est dite *juste*. Une faible surcharge mise dans l'un



des plateaux fait pencher la balance du côté de la surcharge. La facilité de ce déplacement s'appelle *sensibilité*. Il est constaté par des dispositifs divers. Les balances de précision permettent toujours de le mesurer au moyen d'une graduation. Nous allons étudier par le calcul les conditions de justesse et de sensibilité en exposant ce qu'on appelle la *théorie de la balance*. Tandis que, dans la théorie du levier, nous avons négligé son poids, le poids du fléau joue ici un rôle prépondérant, comme on va voir.

121. Condition de justesse. — Soient ϖ le poids du fléau, P les poids égaux, mais quelconques, qui agissent en A et B. La condition de justesse est que AB *reste horizontal quel que soit* P. Soient, dans cette position, l, l' et x les bras de levier des deux poids P et du poids ϖ du fléau. La condition d'équilibre est que la somme algébrique des moments des trois forces par rapport au point O soit nulle ; on devra donc avoir



$$(1) \quad P(l' - l) + \varpi x = 0.$$

Cette égalité doit avoir lieu quel que soit x. En particulier, pour $P = 1$ et $P = 2$, on aura

$$l' - l + \varpi x = 0,$$
$$2(l' - l) + \varpi x = 0.$$

On en conclut

$$(2) \qquad l' - l = 0$$

et $\varpi x = 0$, ou, comme ϖ ne peut pas être nul,

$$(3) \qquad x = 0.$$

Les conditions (2) et (3) sont d'ailleurs suffisantes pour que l'égalité (1) ait lieu quel que soit P. Ainsi :

Pour qu'une balance soit juste, il faut et il suffit que les bras de levier soient égaux et que le centre de gravité du fléau soit sur la verticale de son point d'appui.

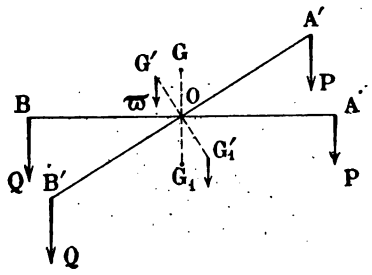
Ces conditions peuvent être réalisées grossièrement, et d'une façon suffisante pour les balances ordinaires, les frottements dissimulant les légères imperfections. Mais dès qu'il s'agit d'une balance de précision, la grande mobilité de la balance permet de constater qu'elle n'est jamais juste. Elle penche toujours d'un côté ou de l'autre, sous l'action de poids égaux, et cela, d'autant plus que ces poids sont plus considérables. On le constate au moyen de la graduation signalée au n° 120. Il importait donc d'imaginer une méthode de précision, indépendante de la justesse de la balance. C'est ce qu'a fait *Borda*, en inventant la *méthode des doubles pesées*.

122. Méthode de la double pesée. Importance de la sensibilité. — Dans un des plateaux de la balance, on met le corps à peser, puis on l'équilibre par de la grenaille de plomb mise dans l'autre plateau, de façon que la balance oscille autour d'une position d'équilibre voisine du zéro de la graduation qui sert à observer les déplacements du fléau. On remplace ensuite le corps par des poids étalonnés et on détermine ceux-ci par la condition que la balance oscille autour du même point que dans la première partie de la pesée. Le poids du corps et les poids marqués ainsi déterminés, produisant le même effet sur la balance, sont des forces égales.

On le voit, la méthode de Borda est indépendante de la justesse de la balance et de toute formule. Il semble donc qu'elle ne demande aucune étude théorique. Il n'en est rien. On doit se demander pourquoi telle balance est plus précise que telle autre. Quand, dans la recherche des poids marqués qui peuvent remplacer le corps, on fait varier ces poids de 1 centigr. par exemple, l'une des balances accuse un déplacement plus accentué que l'autre. La première permettra des pesées plus précises. Elle est dite plus sensible. La différence de sensibilité n'est pas due seulement à

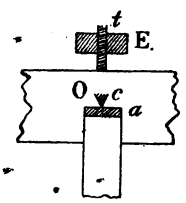
la qualité des surfaces frottantes, mais aussi à diverses causes que le calcul met en évidence, mais qu'on peut prévoir aussi sans formule. C'est ainsi que la hauteur du centre de gravité du fléau par rapport à son point d'appui joue évidemment un rôle fondamental, comme on va voir.

123. Réglage du centre de gravité du fléau. — Soient P et Q les poids sensiblement égaux qui agissent sur les deux bras de levier du fléau supposé d'abord horizontal en AB. Si le moment de Q l'emporte légèrement sur celui de P, la balance s'infléchit en A'B'. Les bras de levier des poids P et Q sont alors diminués, mais *dans le même rapport*, de façon que Q continue de l'emporter sur P, quoique d'une quantité moindre. Ce n'est que le poids ϖ du fléau qui peut intervenir pour fixer le fléau dans une nouvelle position d'équilibre. Par raison de symétrie, son point d'application, qui est le centre de gravité du fléau, est sensiblement sur la verticale du point O, quand AB est horizontal ; il n'agit pas dans cette position, son action étant détruite par la résistance du point d'appui. Si le centre de gravité coïncide avec le point O, le poids ϖ n'agit dans aucune position du fléau ; la prépondérance du poids Q continuera de faire pencher la balance de plus en plus du même côté. Si le centre de gravité est en G au-dessus du point O, le déplacement du fléau l'amène en G' et la prépondérance de Q est exagérée par l'effet du poids ϖ qui agit alors dans le même sens que Q. Dans ces deux cas, la balance ne peut pas servir. Dans le premier cas elle est *indifférente*, dans le second elle est dite *folle*. Enfin si le



centre de gravité est en G_1 au-dessous du point O, le déplacement de la balance l'amène en G'_1, et le poids ϖ vient combattre de plus en plus la prépondérance du poids Q. Si donc cette prépondérance de Q n'est pas trop forte, on rencontrera une inclinaison pour laquelle l'équilibre sera établi. Il le sera d'autant plus vite que le moment du poids ϖ sera plus grand. Or ce moment est proportionnel au bras de levier, lequel est lui-même proportionnel à la distance OG_1 du centre de gravité au point O. Ainsi, on augmentera l'angle d'inclinaison de la balance, pour une prépondérance donnée du poids Q, en diminuant OG_1. *La sensibilité est d'autant plus grande que le centre de gravité du fléau est plus haut.* S'il est trop bas, la balance manque de précision ; s'il est trop voisin du point O, la balance est à peu près indifférente et les pesées deviennent pénibles, sinon impossibles.

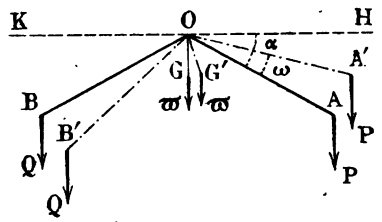
Il y a donc intérêt à pouvoir régler la hauteur du centre de gravité du fléau, à volonté. Pour des pesées rapides, on l'abaissera ; pour des pesées très précises, il faudra au contraire l'élever. Les positions d'équilibre seront alors plus longues et plus pénibles à déterminer. Pour faire ce réglage, les balances de précision portent, au-dessus du centre O du fléau, une tige *t* munie d'un pas de vis et qui porte un écrou E. En vissant ou dévissant l'écrou, on le fait descendre ou monter. On peut ainsi amener le centre de gravité du fléau à telle hauteur que l'on veut. On le règle de façon que la balance ait la sensibilité souhaitée.



Nous allons maintenant établir la formule d'équilibre du fléau. Elle met en évidence les meilleures conditions pour la construction d'une balance sensible.

124. Équation d'équilibre de la balance. — Soit AOB le

triangle isocèle formé par le point d'appui O et les points d'application A et B du poids P et du poids $Q = P + p$. Si je ne suppose pas ces points en ligne droite, quoiqu'il en soit ainsi réellement, c'est pour montrer par le calcul qu'il y a effectivement intérêt à les mettre en ligne droite. Soit G le centre de gravité du fléau. Par raison de symétrie, il est situé sur la bissectrice OG de l'angle AOB. Par suite de la surcharge p, le fléau est dévié de sa position première où la droite OG est verticale. Il se met en équilibre dans une certaine position A'OB'. L'équation d'équilibre entre les poids P et Q et le poids ϖ du levier est alors



$$(1) \qquad m^t Q + m^t P + m^t \varpi = 0.$$

Cette équation fera connaître l'angle d'inclinaison inconnu de la balance $AOA' = \omega$, dès qu'on aura évalué ses trois termes au moyen de ω et des données, qui sont

$$OA = OB = l, \qquad OG = d,$$
$$\widehat{HOA} = \widehat{BOK} = \alpha.$$

Je compte les moments positivement quand ils tendent à faire tourner le fléau de droite à gauche. Il vient

$$m^t Q = +(P + p) OB' \cos KOB' = +(P + p) l \cos(\alpha + \omega),$$
$$m^t P = - P.OA' \cos A'OH = - Pl \cos(\alpha - \omega),$$
$$m^t \varpi = - \varpi.OG \cos G'OH = - \varpi.d \sin \omega.$$

L'équation (1) s'écrit donc

$$(P + p) l \cos(\alpha + \omega) - Pl \cos(\alpha - \omega) - \varpi d \sin \omega = 0.$$

Dans cette égalité, je remplace $\cos(\alpha + \omega)$ et $\cos(\alpha - \omega)$

par leurs développements. J'ordonne ensuite par rapport à cos ω et sin ω. Enfin je divise par cos ω, de façon à dégager la valeur de tg ω. Il vient ainsi

$$(2) \qquad \operatorname{tg} \omega = \frac{p\ l \cos \alpha.}{(2P + p)\, l \sin \alpha + \varpi d.}.$$

Plus ω sera grand pour une surcharge donnée p, plus la balance sera sensible. La valeur de tg ω peut donc servir de mesure à la sensibilité. Or le dénominateur de tg ω contient P. Ce terme en P a pour effet de diminuer la sensibilité à mesure que le poids mesuré P augmente. C'est là un grave défaut parce que les frottements, qui augmentent avec la charge P, diminuent aussi la sensibilité. Il y a intérêt à rendre la sensibilité indépendante de P et, pour cela, il suffit de faire $\sin \alpha = 0$, c'est-à-dire $\alpha = 0$. En d'autres termes, le constructeur devra mettre les trois points A, O et B en ligne droite. Dans ces conditions, la formule (2) devient

$$(3) \qquad \operatorname{tg} \omega = \frac{pl}{\varpi d}.$$

Elle conduit à l'énoncé suivant :

La sensibilité d'une balance est proportionnelle à la longueur l *du fléau; elle est en raison inverse de son poids* ϖ *et de la distance* d *de son centre de gravité au point d'appui.*

Ces trois conséquences sont assez évidentes *a priori*. Les deux premières montrent que le fléau doit être long et léger. La troisième conduit à l'écrou de réglage décrit au n° 123.

125. Balance de Roberval. — Cette balance, très employée dans le commerce de détail, est représentée par deux projections (fig. 1 et 2). La figure 1 montre la balance de face; la figure 2 est une projection du plateau gauche B, avec son système d'attache, sur le plan de profil de la figure 1. Pour augmenter la commodité de la balance ordinaire et dimi-

nuer ses dimensions, les plateaux p, p, p', au lieu de pendre au-dessous des couteaux b, b', b'' fixés aux extrémités A et B du fléau, reposent au-dessus d'eux, comme le montre la figure 2 et la moitié gauche de la figure 1. Il faut alors les empêcher de basculer autour des couteaux. C'est le but de l'articulation CDE représentée seulement sur la moitié droite de la figure 1 où on a enlevé le reste pour augmenter

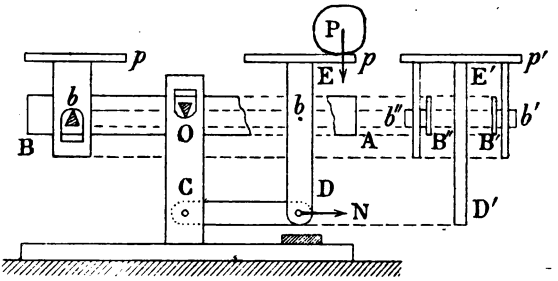


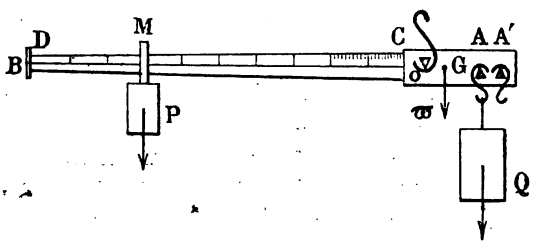
Fig. 1 Fig. 2

la clarté. Elle est située dans le plan de symétrie de front, à égale distance des deux tiges AB, B', B'' (fig. 1 et 2), qui, liées entre elles, constituent à elles deux le fléau. La tige horizontale CD pivote autour d'un point C, fixé au pied de l'appareil et situé dans le plan de profil du couteau O. En D, elle s'articule avec la tige verticale DE, fixée au centre du plateau. Ce dispositif laisse entièrement libre le mouvement du plateau dans le sens vertical. Il l'empêche seulement de verser, en maintenant la tige DE verticale. Le jeu des forces est celui-ci : La tige CD oppose une réaction N dirigée suivant CD. La valeur de N est telle que, par rapport à l'axe du couteau b, la somme des moments de N et de la charge P du plateau soit nulle (110). Comme le bras de levier de N est toujours beaucoup plus grand que celui de P, par compensation, cette réaction N est faible. La charge du couteau B est la résultante de P et de N. Elle

diffère très peu de P. Seulement, la composante horizontale N exige que le couteau repose, non pas sur un plan, mais sur une chape de forme curviligne ou, mieux encore, angulaire. Le plateau gauche est maintenu par un système identique au premier ; mais on en a supprimé le dessin pour rendre plus claire la figure 1.

J'ai décrit le mode d'attache des plateaux qui m'a paru le plus facile à faire comprendre. Il y en a d'autres où les deux tiges identiques à CD sont remplacées par une seule, supportée par les tiges telles que ED. Deux heurtoirs placés au centre l'empêchent de se porter à droite ni à gauche. Ce second dispositif a, pour l'exposition, l'inconvénient de faire croire que la tige inférieure auxiliaire joue le même rôle que le fléau, ce qui compliquerait la théorie. Il n'en est rien, quoi qu'en pensent quelques auteurs : dans tous les cas, la charge des plateaux repose *exclusivement* sur le couteau O du fléau, qui est le seul organe essentiel.

126. Balance Romaine. — Elle se compose d'un levier AOB symétrique par rapport au plan du papier. On voit en O, sur la face antérieure, un couteau, le tranchant en dessous,



par lequel il repose sur un crochet fixe. C'est le point d'appui. Le petit bras porte en A et A′ deux autres couteaux, le tranchant en dessus. Chacun d'eux supporte un crochet où l'on peut suspendre le corps à peser. Enfin P est un poids mobile le long du grand bras OB. Les positions de

ce poids sont repérées au moyen du curseur M et d'une graduation gravée tout le long du grand bras. Pour faire une pesée, on amène le curseur M à la position qui amène le fléau à être horizontal. La théorie de cette balance et de sa graduation s'établit comme il suit.

Soient :

ϖ, le poids du levier, appliqué en G,

Q, le poids du fardeau, appliqué en A,

P, le poids mobile le long du grand bras,

M, sa position lors de l'équilibre avec le poids Q,

C, sa position d'équilibre pour $Q = 0$.

On aura les deux équations d'équilibre :

$$P.OM = Q.OA + \varpi.OG, \tag{1}$$

$$P.OC = \varpi.OG, \tag{2}$$

et, en retranchant membre à membre ces deux équations,

$$P.CM = Q.OA.$$

De cette formule on tire

$$Q = P.\frac{CM}{OA}, \tag{3}$$

qui permet de calculer Q. On connaît en effet P et OA par construction; la longueur CM se lit sur l'instrument. La formule (3) fournit un moyen pratique de graduer le grand bras *en poids*, ce qui permet d'éviter de faire le calcul qu'exigerait la formule (3). On fait $Q = 0$, puis, par exemple, $Q = 10$ kilog. On marque en C et D les positions du curseur M, qui amènent l'équilibre dans ces deux cas. Enfin on partage CD en dix parties égales ; chaque division répond à un kilogramme. On subdivise autant qu'il convient ces divisions et on prolonge la graduation au-delà du point D.

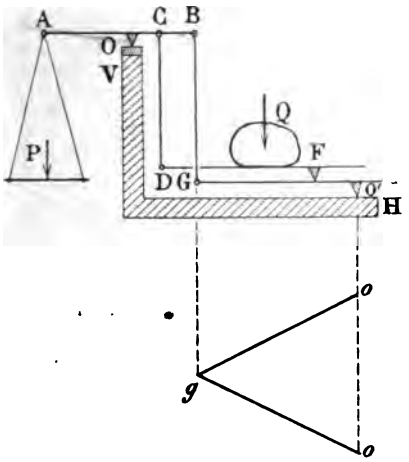
Nous avons parlé seulement du couteau A. Au second couteau A′ correspond une graduation sur l'autre face du fléau. Étant plus éloigné du point d'appui, il sert pour les

corps plus légers. Commode dans le commerce, cette balance n'est pas susceptible de précision. On obtient des résultats meilleurs avec la bascule du commerce, que nous allons étudier.

127. Bascule du commerce de Quintenz. — Elle se compose de trois parties principales :

1° Un bâti en forme d'équerre HV;

2° Un premier système articulé PAOBGO' se compose du levier horizontal AOB qui repose par un couteau sur le bâti V, au point O. Il supporte, au point A, le plateau P et, au point B, la tige verticale BG. Celle-ci porte le sommet G d'un triangle de fer horizontal, qui se projette verticalement en GO' et horizontalement en *goo*. Les deux sommets *o*, *o* reposent sur le bâti H par des couteaux figurés par leur projection O';



3° Un second système articulé CDF se compose d'une tige verticale CD, portée par le levier AB au point C. Cette tige porte, à son tour, au point D, une plateforme DF qui repose, à sa partie postérieure, sur deux couteaux, symétriquement placés par rapport au plan vertical, et projetés sur ce plan en F. Toutes les articulations A, O, C, B, D, G, F, O' sont formées par des couteaux d'acier portant sur des chapes de même métal.

Le poids Q, à mesurer, est placé sur la plateforme DF. On l'équilibre avec des poids marqués P placés dans le pla-

teau et déterminés de façon que le levier AOB soit horizontal. Les dimensions de l'appareil sont calculées de façon que, lorsque la charge Q de la bascule fait descendre légèrement la plateforme DF, celle-ci demeure horizontale. Démontrons d'abord que cette condition exige la relation

$$\frac{O'F}{O'G} = \frac{OC}{OB},$$

qui doit être observée par le constructeur. Je dois écrire que les descentes des points D et F de la plateforme sont égales.

Pour cela, je les compare toutes deux à celles du point G. Enfin je remarque que la descente du point G est égale à celle du point B et que celle de D est égale à celle de C. Dans le mouvement, les points F, G, B, C descendent de quantités sensiblement égales aux petits arcs de cercles FF′, GG′, BB′, CC′ qu'ils décrivent. Ces arcs sont proportionnels à leurs rayons. On a donc

$$(1) \qquad \frac{FF'}{GG'} = \frac{O'F}{O'G}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{FF'}{BB'} = \frac{O'F}{O'G},$$

$$(2) \qquad \frac{CC'}{BB'} = \frac{OC}{OB}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{DD'}{BB'} = \frac{OC}{OB}.$$

On veut que FF′ et DD′ soient égaux ; il faut et il suffit, pour cela, que l'on ait, entre les seconds membres des formules 1 et 2, l'égalité

$$(3) \qquad \frac{O'F}{O'G} = \frac{OC}{OB}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Examinons maintenant la condition d'équilibre du levier AOCB sous l'action des poids marqués P et du fardeau Q. Pour simplifier, j'assimile la figure à une figure plane verticale, en confondant par la pensée les couteaux *o*, *o* par exemple en un seul couteau O′ placé à égale distance des deux premiers. La charge du couteau O′ devra seulement être répartie entre les deux couteaux réels.

La charge Q se décompose alors en deux autres dont la somme est égale à Q, savoir :

1° q, appliquée en D. Cette force se transmet intégralement au point C par la tige DC ;

2° q', appliquée en F. Celle-ci se décompose à son tour en deux forces. L'une, appliquée en O', est détruite par la rigidité du bâti H. L'autre, appliquée en G, a pour valeur $q'\frac{O'F}{O'G}$ (n° 41). Elle se transmet intégralement au point B par la tige GB. En résumé, l'effet du poids Q sur le levier AOCB peut être remplacé par les deux forces

$$q, \text{ appliquée en C,}$$

$$q'.\frac{O'F}{O'G}, \text{ appliquée en B.}$$

La condition d'équilibre du levier sous l'action de ces deux forces et des poids marqués P est

$$P.OA = q.OC + q'\frac{O'F}{O'G}.OB,$$

ou, en remplaçant $\frac{O'F}{O'G}.OB$ par sa valeur OC déduite de l'égalité (3),

$$P.OA = (q + q').OC.$$

Je remplace, dans cette égalité, $q + q'$ par sa valeur Q et j'obtiens, pour cette quantité, la valeur cherchée

$$Q = P.\frac{OA}{OC}.$$

Les constructeurs font généralement $\frac{OA}{OC} = 10$. On a alors

$$Q = 10P.$$

La valeur du poids cherché Q *est égale à* 10 *fois le poids marqué* P *par lequel on lui fait équilibre dans le plateau de la balance.*

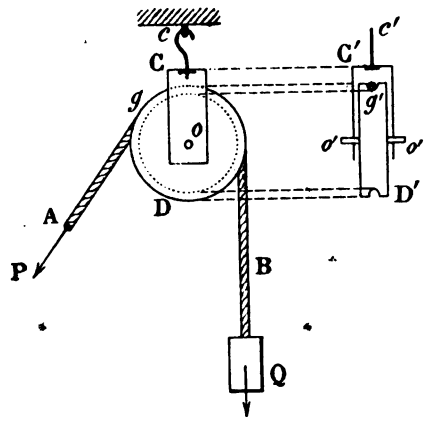
Remarques. — 1° La pesée est indépendante de la position

du fardeau Q sur la plateforme DF. C'est une deuxième conséquence essentielle de la relation (3) observée par le constructeur. La première conséquence est, on l'a vu, que la plateforme reste horizontale dans ses petits déplacements.

1° Les parties délicates des balances sont les couteaux et leurs appuis. Pour cette raison, les balances sont munies de dispositifs qui permettent de soulager ces parties délicates, dans la position de repos.

§ IV. — Poulies.

128. Description et usage de la poulie. — La *poulie*, représentée sur la figure par deux projections, se compose d'un disque circulaire D, D′ mobile autour d'un axe *o*, *o′*, *o′* passant par son centre et porté par une *chape* C, C′. Elle présente sur sa tranche une *gorge* *g*, *g′* dans laquelle s'engage la corde AB. Sur les deux brins A et B agissent deux forces de traction, la puissance P et la résistance Q. La poulie est dite



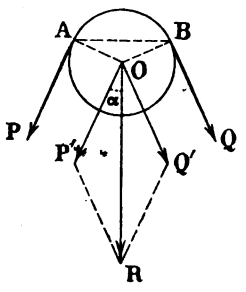
fixe quand la chape est fixée par son crochet *c*, *c′*. C'est le cas de la figure ci-dessus. Dans d'autres cas (fig. du n° 130), la

poulie repose sur la corde. Le crochet c, au lieu de servir à fixer la poulie, porte la charge Q. L'un des brins de la corde AB est soutenu par un point fixe D ; sur l'autre brin agit la puissance P (n° 130). La poulie est dite *mobile*. Dans tous les cas, le *frottement de glissement* de la corde sur la gorge de la poulie, étant bien supérieur au *frottement de roulement* de la poulie sur son axe, la prépondérance de la traction exercée sur l'un des brins tend à faire tourner la poulie sur son axe plutôt qu'à faire glisser la corde dans la gorge. On peut alors faire abstraction de la corde et imaginer que les deux tractions sont directement appliquées à la gorge même de la poulie, dans la direction de la corde.

129. Équilibre de la poulie fixe. — La poulie étant *fixe*, son axe est fixe. Dès lors la condition d'équilibre est celle du levier. La somme algébrique des moments des forces agissant sur les brins A et B doit être nulle. Ces forces ont toutes deux pour bras de levier le rayon de la poulie. Elles doivent donc être égales.

La *charge de l'axe de la poulie* est la résultante de translation R des forces AP et BQ. C'est la diagonale du parallélogramme OP'RQ'. Si on désigne par α le 1/2 angle P'OR de P avec Q, elle a pour valeur

$$R = 2P \cos \alpha.$$



On peut donner de R une expression élégante en fonction de la corde de contact $AB = c$ de la poulie avec la corde et du rayon r de la poulie.

Les triangles AOB et RP'O sont en effet semblables comme ayant leurs côtés perpendiculaires. On a donc entre ces côtés la proportion

$$\frac{OR}{OP'} = \frac{AB}{OA},$$

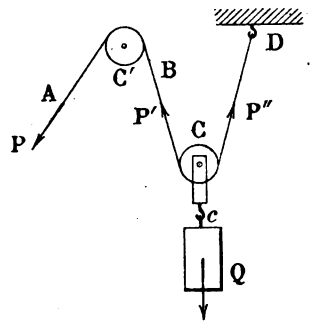
qui s'écrit, en remplaçant les segments par leurs valeurs,

$$\frac{R}{P} = \frac{c}{r}.$$

La charge de l'axe est à la tension des brins comme la corde de contact est au rayon de la poulie.

Si les deux brins sont parallèles, la charge de l'axe est égale au double de la tension de la corde.

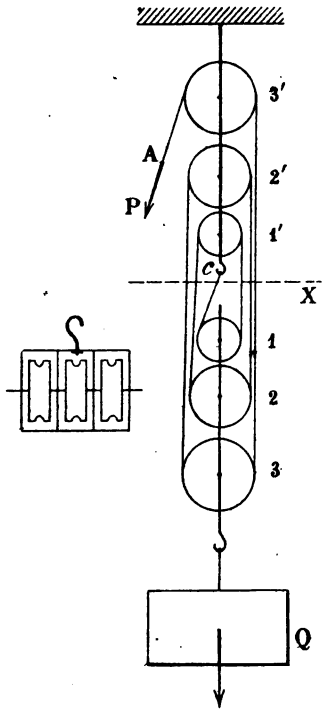
130. Équilibre de la poulie mobile. — La poulie mobile C porte la charge Q par son crochet *c* et repose sur la corde ABD fixée à son extrémité D. Sur le brin libre A, s'exerce, soit directement, soit plus généralement, par l'intermédiaire d'une poulie fixe C′, la puissance P qui se transmet tout le long de la corde (n° 108). La poulie est en équilibre sous l'action du poids Q et des tensions P′ et P″, égales à P, des brins B et D de la corde. La condition d'équilibre résulte du n° précédent.



Il faut et il suffit que la résistance Q *soit à la puissance* P *comme la sous-tendante de l'arc de contact est au rayon de la poulie.*

131. Moufles et palans. — La *moufle* est un ensemble de poulies montées dans une même chape. Leurs axes sont, soit confondus, comme dans la figure de gauche, soit distribués sur une même verticale comme sur la figure de droite. Cette figure de droite représente un *palan*. C'est un ensemble de deux moufles. La moufle inférieure est mobile et porte par son crochet le fardeau Q. La moufle supérieure est fixe. La corde est fixée par une de ses extré-

mités au crochet c de la moufle supérieure. Elle passe successivement sur les poulies 1, 1′, 2, 2′, 3, 3′ et sort librement en A. Sur ce brin libre s'exerce la puissance P qui se transmet à tous les brins (n° 108). Cherchons la condition d'équilibre. Pour simplifier, je suppose tous les brins verticaux, condition à très peu près réalisée. Dès lors, coupons, par la pensée, les six brins suivant le plan X compris entre les deux moufles. La partie de la figure qui est au-dessous de ce plan, c'est-à-dire la moufle inférieure, était en équilibre sous l'action du poids Q et des six tensions que produisaient sur les brins coupés les brins supérieurs qui y aboutissent. On a donc



$$Q = 6P\,; \qquad \text{d'où} \qquad P = \frac{Q}{6}.$$

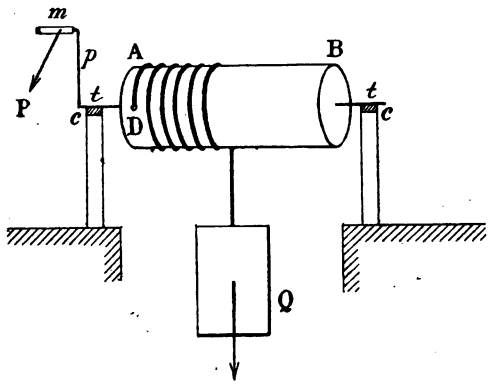
Plus généralement, s'il y a n poulies à chaque moufle, on a

$$P = \frac{Q}{2n}.$$

Ainsi, comme le levier, le palan permet de vaincre une résistance donnée avec une puissance plus faible, d'autant qu'on voudra.

§ V. — Treuil.

132. **Description du treuil.** — Comme le levier et le palan, le treuil a pour objet de vaincre une résistance avec une puissance plus faible. C'est un corps mobile autour d'un axe fixe. Il se compose d'un cylindre horizontal AB, généralement en bois, appelé *arbre*. Ses deux extrémités A et B sont terminées par deux *tourillons* *t*, *t*, reposant sur des *coussinets* *c*, *c* et qui déterminent l'axe de rotation. Au pro-



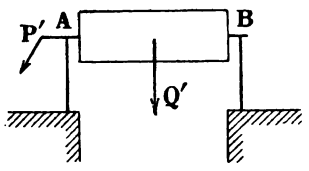
longement de l'un des tourillons est fixée une *manivelle* *m*. Sur l'arbre s'enroule une corde dont une des extrémités est fixée à l'arbre en un point D. L'extrémité libre porte le fardeau Q. Pour le soulever, on tourne la manivelle *m*, dans le sens de l'enroulement de la corde, en y appliquant la puissance P qui est en général l'effort de l'homme. Le treuil que nous avons décrit est souvent installé au-dessus des puits. L'arbre peut, dans d'autres cas, être vertical, comme dans le *cabestan* utilisé par les marins.

133. Équilibre du treuil. — Pour qu'il y ait équilibre, il faut et il suffit (111) que la somme algébrique des moments des forces P et Q par rapport à l'axe de rotation AB soit nulle. Les *bras de levier* de ces forces sont leurs distances à l'axe. Comme elles sont dirigées tangentiellement aux circonférences que décrivent leurs points d'application, les bras de levier sont les rayons de ces cercles, savoir : pour Q, le rayon q de l'arbre ; pour P, le rayon p de la manivelle. L'équation d'équilibre est donc

$$Pp = Qq.$$

Quant à la charge des tourillons A et B, elle est déterminée comme il suit :

134. Charge des tourillons. — Les forces P et Q peuvent être transportées en P′ et Q′ aux points où l'axe est coupé par les plans des cercles que décrivent leurs points d'application. On doit, il est vrai, adjoindre à chacune des forces transportées un couple, mais ces couples se détruisent : cela résulte de la condition d'équilibre du n° 133. La force P′ peut être décomposée en deux autres p_1 et p_2, appliquées en A et B d'après la règle de composition des forces parallèles (41). De même Q′ peut être remplacée par deux forces q_1 et q_2, appliquées en A et B. La charge du tourillon A sera la résultante de p_1 et q_1. La charge de B sera la résultante de p_2 et q_2.

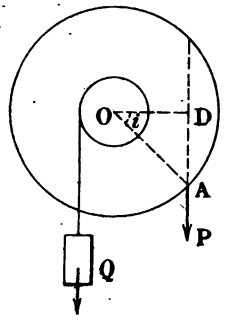


135. Treuil des carriers. — Les treuils installés au-dessus des puits des carrières ne diffèrent des précédents que par le mode d'application de la puissance. La manivelle est remplacée par une grande roue à chevilles. Un homme

monte sur ces chevilles comme sur une échelle. Quand il est au bas de la roue, son poids tend à maintenir la roue dans cette position. S'il s'élève, il tend à la faire tourner de

façon à être ramené au bas par la rotation. Cette tendance, due au moment du poids de l'homme, augmente avec son bras de levier, c'est-à-dire jusqu'au moment où l'homme atteint l'extrémité du diamètre horizontal. Si donc, avant qu'il atteigne cette position extrême, le moment de son poids P atteint et dépasse le moment du fardeau qui agit en sens contraire, il entraînera le treuil et soulèvera le fardeau Q. La condition d'équilibre est que la somme

algébrique des moments de P et Q soit nulle. Le moment de la résistance est encore Qq (132). Le moment de la puissance AP est $-$ P.OD. Or dans le triangle ADO, rectangle en D, on a



$$OD = OA \cos AOD.$$

Si l'on porte cette valeur dans l'équation des moments, en posant

$$OA = p \quad \text{et} \quad \widehat{AOD} = i,$$

il vient, pour la condition d'équilibre,

$$(1) \qquad P.p.\cos i = Q.q.$$

p et q sont connus par construction. On connaît le poids de l'homme P et celui du fardeau Q. La formule (1) permet alors de calculer l'angle i qui définit la position du manœuvre sur la roue. On obtient

$$(2) \qquad \cos i = \frac{Q.q}{P.p}.$$

Pour que le problème soit possible, et par suite pour que l'homme puisse monter le fardeau, il faut que Q ne soit pas trop grand, de façon que la valeur de cos i donnée par la formule (2) soit inférieure à 1. Il faut donc que l'on ait

$$Qq < Pp \qquad \text{ou} \qquad Q < \frac{Pp}{q}.$$

Telle est la limite de la charge Q que peut monter l'homme de poids P.

---

136. Remarques générales sur les machines et sur la statique. — Pour terminer, nous devons rappeler que nous avons examiné les machines simples au seul point de vue

statique. Le sujet est loin d'être épuisé. Les propriétés *cinématiques* et *dynamiques* des machines sont du plus haut intérêt. Je crois même devoir signaler la plus importante de ces propriétés pour le levier, le palan et le treuil, afin d'éviter une illusion qui pourrait naître de l'étude restreinte que nous en avons faite. Nous avons vu qu'on peut, à l'aide de telles machines, vaincre une résistance aussi grande qu'on veut avec une puissance donnée, pourvu qu'on dispose de machines assez résistantes et en même temps assez légères. Il importe de se rendre compte que, ce qu'on gagne ainsi d'un côté, on le perd de l'autre. Si, pour équilibrer Q, il suffit d'une puissance P dix fois plus faible, par exemple, il faut en revanche, pour donner au fardeau Q un certain déplacement, que la force motrice P imprime à son point d'application un déplacement dix fois plus grand. C'est là un principe tout à fait général, exprimé par cet adage : « *Ce qu'on gagne en force, on le perd en vitesse.* »

Son importance et sa généralité sont telles qu'on en pourrait faire la base de la statique, en l'adoptant comme principe fondamental. Les programmes en ont décidé autrement pour des raisons très valables et qui ne peuvent être exposées ici; mais il importe que des débutants ne se figurent pas que la méthode suivie par leurs maîtres est la seule possible. C'est seulement celle qui a été jugée la meilleure, soit absolument, soit pour l'état de maturité des élèves à qui elle s'adresse.

EXERCICES PROPOSÉS SUR LE CHAPITRE IV

Ce ne sont pas seulement des exercices sur les machines simples que je réunis ici, mais aussi sur les systèmes à liaisons. Je n'ai pas cru devoir les faire entrer dans le chapitre III, déjà très chargé, et où l'étude des liaisons joue un rôle secondaire.

1. Une force P parallèle à la ligne de pente d'un plan incliné maintient en équilibre un poids Q. Quelle est l'inclinaison du plan ?

Exemple : $Q = 3$, $P = 2$.

2. Un corps repose en équilibre sur un plan incliné. La pression N qu'il exerce sur ce plan, la puissance P qui le maintient en équilibre et son poids Q sont proportionnels aux trois nombres n, p, q. Trouver l'inclinaison du plan et l'angle de la puissance avec le plan incliné.

Application : $n = 4$, $p = 5$, $q = 6$.

3. Une sphère du poids P qui repose sur un plan dont l'inclinaison est i est maintenue en équilibre sur ce plan par un fil horizontal. Calculer la tension du fil.

Application : $i = 30°$, $P = 25^{gr}$.

4. Un poids P est maintenu en équilibre sur un plan incliné par trois forces égales à $\frac{P}{3}$, l'une horizontale, l'autre verticale et la troisième parallèle à la ligne de pente, chacune dans le sens où elle combat l'effet de la pesanteur. Calculer l'inclinaison du plan.

5. Un levier AB est formé par une barre rectiligne homogène de longueur l et dont le poids p n'est pas négligeable. Le point d'appui C est tel que $AC = 2CB$. Conditions pour que ce levier soit en équilibre sous l'action de forces parallèles F et F′ agissant à ses extrémités A et B.

6. Un levier est composé de deux bras rectangulaires, pesant

p^{kg} par mètre. Leurs longueurs sont 1^m et 2^m : 1° Quel poids faut-il attacher à l'extrémité du bras le plus court pour qu'il soit incliné à 45° sur le plan horizontal ? 2° Quelle est son inclinaison en l'absence de cette force ? 3° Dans ces deux cas, calculer la charge du point d'appui.

7. Une tige OBA pèse p kilogrammes par mètre. On veut en former un levier du premier genre en fixant son extrémité O. Une résistance verticale donnée Q, dirigée vers le bas, est appliquée en un point donné B de la tige. En quel point du prolongement de OB faut-il couper la tige supposée trop longue, pour rendre minimum la puissance verticale qui, appliquée à l'extrémité de la tige ainsi raccourcie, maintient le levier en équilibre dans la position horizontale ?

8. On pèse un corps dans l'un des plateaux d'une balance, et l'on constate que, pour lui faire équilibre, il faut placer dans l'autre un poids de 1^{kg}. On le place alors dans ce second plateau et l'on trouve qu'il faut cette fois 1 200 grammes dans le premier plateau pour lui faire équilibre. Quel est le rapport des bras de levier du fléau et le poids réel du corps ?

9. L'un des bras de levier d'une balance fausse surpasse l'autre de la fraction $\frac{1}{m}$ du plus petit. Lorsqu'on se sert de cette balance, on met aussi souvent les poids d'un côté que de l'autre. Combien le marchand perdra-t-il ou gagnera-t-il pour cent ?

10. Un marchand ambulant pèse des fruits dans une voiture inclinée sur le plan horizontal. Sa balance est juste, mais il la dispose suivant la ligne de pente de la voiture : 1° Dans quel plateau doit-il placer les fruits pour faire tort au client ? 2° Le client, s'apercevant de la supercherie, note le résultat P de cette première pesée et fait placer les fruits pesés dans le second plateau. C'est alors le poids P′ qui leur fait équilibre. Quel est le poids dont on lui aurait fait tort par la première pesée ? S'il connaît l'inclinaison i de la voiture, peut-il utiliser les résultats des deux pesées pour évaluer la sensibilité de la balance employée ?

11. Un *peson* est composé d'un levier muni d'une aiguille qui est verticale dans la position d'équilibre, en l'absence de toute charge. On place une charge P sur le plateau qui porte à cet effet le peson. L'aiguille est déplacée d'un angle i. Démontrer que tg i est proportionnelle à P. En déduire un mode de graduation de l'instrument.

12. Quelle force faut-il employer pour soutenir un poids de 50^{kg} à l'aide d'une poulie mobile, les brins de la corde faisant un angle de 60° ?

13. Quel angle doivent faire les deux brins de la corde qui passe sur une poulie mobile, pour que la puissance soit égale à la résistance ?

14. Une corde ABCD, fixée à son extrémité A, supporte en B une poulie mobile de très petit rayon dont la charge est Q ; en C elle passe sur une poulie fixe de très petit rayon. Enfin en D agit la puissance P. On donne la longueur du segment AC qui est supposé horizontal et on demande de calculer le rapport $\frac{P}{Q}$ en fonction de la distance verticale du point B au-dessous du point d'attache A.

15. Une corde ABC est fixée aux points A et C. En B, elle porte, par sa poulie supérieure, une moufle à deux poulies qui a ses axes parallèles disposés dans un plan vertical (fig. du n° 131). Une autre corde AB'D, fixée en A, passe en B' sur la poulie inférieure de la moufle et porte en D un poids P. Déterminer la position d'équilibre, en négligeant les dimensions de la moufle, c'est-à-dire en supposant que le point B' coïncide avec le point B.

16. Le rayon de la manivelle d'un treuil est $0^m,60$, celui de l'arbre est $0^m,15$. Quel effort faut-il appliquer à la manivelle pour équilibrer un poids de 100 kilog. ?

Les exercices ci-dessus sont des plus simples, s'appliquant aux machines proprement dites. Les suivants présentent plus de variété et demandent souvent plus d'invention. Je les donne sans aucune indication ni classification, parce qu'ils se rapportent à l'ensemble des connaissances acquises par les élèves.

17. Un tableau rectangulaire de poids P repose par deux clous E, F sur la face SAB d'un chevalet SABC de poids négligeable, en forme de pyramide. Ce chevalet repose par sa base ABC sur le plan horizontal. L'arête SC, articulée en S, est mobile dans le plan perpendiculaire au milieu de AB. Le pied C est rattaché par une corde CD au milieu D d'une tige AB, qui relie les pieds A et B du chevalet. Les clous E, F sont à des hauteurs égales sur les arêtes SA et SB et le tableau déborde également des deux côtés de ces clous. Calculer : 1° la réaction des clous ; 2° la réaction totale reçue par le tableau normalement au plan SAB ;

3° la réaction du plan horizontal sur chacun des trois pieds du chevalet ; 4° la tension de la corde.

Application : $P = 8^{kg}$, $SA = SB = SC = 1^m,50$, $AB = 0^m,80$, $AC = BC = 1^m,15$, $AE = BF = 0^m,90$.

18. Deux poids P et P′ reliés par une corde PCP′ sont placés sur deux plans inclinés dont les lignes de pente AC, BC se coupent au point C. En ce point C la corde passe sur une poulie fixe très petite. Quel doit être le rapport des poids P et P′ pour qu'il y ait équilibre ?

19. Les foyers d'une ellipse attirent un point mobile sur cette courbe avec des intensités proportionnelles à la distance ; trouver les positions d'équilibre. Généraliser le résultat.

20. Une barre homogène de poids P et de longueur l repose par ses deux extrémités sur deux plans inclinés de i et i' sur le plan horizontal. Trouver la position d'équilibre et les réactions des plans.

Application : $P = 2^{kg}$, $l = 0^m,75$, $i = 0$, $i' = 90°$.

21. Une lame homogène de poids P a la forme d'un triangle ABC donné. Ce triangle repose par ses côtés AB, AC respectivement sur deux clous D, E situés sur une même horizontale et dont la distance est d. Trouver les positions d'équilibre.

22. Étant donné un rectangle ABCD, trouver sur la base supérieure AB un point E tel que, si l'on détache le triangle BCE, et que l'on suspende le trapèze AECD par le point E, la base CD demeure horizontale dans la position d'équilibre.

23. Un triangle de forme donnée repose sur la moitié du cercle circonscrit qui est au-dessous du plan horizontal. Trouver les positions d'équilibre et les réactions du cercle. Discuter.

24. Une tige homogène AB est maintenue dans une position horizontale donnée par un fil AC fixé en un point C donné dans le plan vertical de AB et par un fil BD fixé en un point D inconnu. Trouver ce point D et les réactions des fils AC et BD.

25. Dans un angle situé dans un plan vertical repose un dis-

que circulaire de poids donné. Calculer les pressions supportées par les côtés de l'angle, connaissant les inclinaisons de ces côtés.

26. On comprime un losange ABCD formé de quatre tiges articulées aux quatre sommets par deux forces égales P appliquées aux deux sommets opposés A et C et suivant la diagonale. Calculer la pression qu'il faut exercer aux deux autres sommets pour maintenir l'équilibre. Généraliser.

TABLE DES MATIÈRES

Pages

* Notions de Géométrie analytique 1

STATIQUE

Notions préliminaires 11

CHAPITRE PREMIER

Composition des forces agissant sur un même point. — Équilibre du point matériel libre.

§ I. — Composition des forces appliquées à un même point et dirigées suivant une même droite 15
§ II. — Résultante de deux forces concourantes. 16
§ III. — Composition d'un nombre quelconque de forces appliquées à un même point. Équilibre du point matériel libre 23
Exercices proposés sur le chapitre premier. 28

CHAPITRE II

Forces parallèles. — Centres de gravité.

§ I. — Composition des forces parallèles 34
§ II. — Centres de gravité : définitions et propriétés générales 44
§ III. — Centres de gravité de lignes 49
§ IV. — Centres de gravité de surfaces. 52
* § V. — Applications géométriques des centres de gravité des surfaces . 58
§ VI. — Centres de gravité de volumes 60
* § VII. — Théorèmes de Guldin. 66
Exercices proposés sur le chapitre II 70

CHAPITRE III

Composition des forces appliquées à un corps solide. — Théorie des couples.

§ I. — Réduction à deux des forces appliquées à un corps solide. — Conditions générales d'équilibre et d'équivalence des systèmes de forces 79
§ II. — Théorie des couples. 89
§ III. — Application de la théorie des couples à la réduction des forces appliquées à un corps solide. 93
*§IV. — Applications 101
§ V. — Solide gêné par des obstacles 105
Exercices proposés sur le chapitre III 113

CHAPITRE IV

Machines simples.

§ I. — Généralités. — Plan incliné 119
§ II. — Levier 122
§ III. — Balances 124
§ IV. — Poulies 138
§ V. — Treuil. 142
Exercices proposés sur le chapitre IV. 147

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet.